Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 3[†]

Esercizio 1. Sia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale.

(a) Si mostri che $\int_0^1 B_t\,dt$ è una variabile aleatoria normale e se ne calcolino media e varianza.
[*Sugg.* Ricordarsi le somme di Riemann e il Teorema di Fubini]

(b) (*) Si mostri che $\inf_{t\in[0,1]} B_t$ *non* è una variabile normale.

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Data una partizione $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t\}$ dell'intervallo $[0,t]$, indichiamone il passo con $|\pi| = \max_{1\leq i\leq k}(t_i - t_{i-1})$. Introducendo la variazione quadratica $S_\pi = \sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ di B relativa a π, sappiamo che per $|\pi| \to 0$ si ha $S_\pi \to t$ in L^2. Più precisamente, abbiamo visto che esiste una costante $0 < c < \infty$ universale tale che

$$\mathrm{E}\left[(S_\pi - t)^2\right] \;=\; c\,\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})^2\,.$$

Sia $\{\pi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di partizioni $\pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = t\}$, tale che non solo $|\pi^{(n)}| \to 0$ per $n\to\infty$, ma anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\pi^{(n)}| < \infty$.

(a) Si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon) < \infty$.
[*Sugg.* Applicare un'opportuna disuguaglianza.]

(b) (*) Si deduca che $S_{\pi^{(n)}} \to t$ q.c. per $n\to\infty$.

Esercizio 3 (Invarianza per rotazioni del moto browniano in $\mathbb{R}^n$)**.**

(a) Sia $B := \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano n-dimensionale e sia L una matrice reale $n\times n$. Definiamo il processo $\beta := \{\beta_t\}_{t\geq 0}$ ponendo $\beta_t := LB_t$. Si mostri che β è un moto browniano n-dimensionale se e soltanto se $L \in O(n)$ (cioè L è ortogonale: $LL^* = L^*L = I_n$, dove L^* indica la trasposta di L).

(b) Sia $B := \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano n-dimensionale (con $n \geq 2$) e x, y vettori in $\mathbb{R}^n$ ortogonali di norma uno: $\langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle = 1$ e $\langle x,y\rangle = 0$, dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare standard. Si mostri che i processi stocastici $\{X_t := \langle x, B_t\rangle\}_{t\geq 0}$ e $\{Y_t := \langle y, B_t\rangle\}_{t\geq 0}$ sono due moti browniani reali indipendenti.

[†]Ultima modifica: 3 febbraio 2011.

Soluzione 1. (a) Per ogni $\omega\in\Omega$ in cui $t\mapsto B_t(\omega)$ è continua, possiamo ottenere l'integrale come limite (o equivalentemente lim sup) di somme di Riemann:

$$\int_0^1 B_t(\omega)\,\mathrm{d}t \;=\; \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} B_{\frac{i}{N}}(\omega)\,.$$

Si noti che il membro destro di questa relazione è una variabile aleatoria, in quanto lim sup di variabili aleatorie. Essendo $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} B_{\frac{i}{N}}$ una variabile aleatoria normale, per ogni $N\in\mathbb{N}$, anche il limite q.c. (e dunque in legge) è una variabile aleatoria normale: $\int_0^1 B_t\,\mathrm{d}t \sim N(\mu,\sigma^2)$, e inoltre μ e σ^2 sono date dai limiti rispettivamente di media e varianza delle variabili $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} B_{\frac{i}{N}}$. Questo fornisce un modo per calcolare μ e σ^2 (esercizio!).

Vediamo un modo alternativo per il calcolo di μ e σ^2: applicando il teorema di Fubini[†], si ottiene

$$\mu = \mathrm{E}\left(\int_0^1 B_t(\omega)\,\mathrm{d}t\right) \;=\; \int_0^1 \mathrm{E}(B_t(\omega))\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 0\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

(Si noti che possiamo applicare il Teorema di Fubini perché la funzione $|B_t(\omega)|$ è integrabile: infatti $\mathrm{E}(|B_t(\omega)|) = \sqrt{t}\,\mathrm{E}(|N(0,1)|) = c\sqrt{t}$ e dunque $\int_0^1 \mathrm{E}(|B_t(\omega)|)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 c\sqrt{t}\,\mathrm{d}t < \infty$.)

In alternativa, si poteva dedurre che $\mu = 0$ notando che la variabile $\int_0^1 B_t\,\mathrm{d}t$ è simmetrica, cioè ha la stessa legge di $-\int_0^1 B_t\,\mathrm{d}t$, perché sappiamo che $\{-B_t\}_t$ è un moto browniano.

Per calcolare la varianza σ^2, si osservi che possiamo scrivere

$$\sigma^2 \;=\; \left(\int_0^1 B_t(\omega)\right)^2 \;=\; \int_0^1\int_0^1 B_t(\omega)\,B_s(\omega)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,.$$

Applicando ancora il Teorema di Fubini si ottiene

$$\sigma^2 \;=\; \int_0^1\int_0^1 \mathrm{E}(B_t(\omega)B_s(\omega))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^1\int_0^1 \min\{s,t\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,,$$

e dato che l'integrando è simmetrico in (s,t), possiamo restringere il dominio a $\{(s,t):\, s\leq t\}$, ottenendo

$$\sigma^2 \;=\; 2\int_0^1 \mathrm{d}t\left(\int_0^t \min\{s,t\}\,\mathrm{d}s\right) \;=\; 2\int_0^1 \mathrm{d}t\left(\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right)$$
$$\;=\; 2\int_0^1 \mathrm{d}t\left(\frac{t^2}{2}\right) \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

In definitiva, $\int_0^1 B_t\,\mathrm{d}t \sim N(0,\frac{1}{3})$.

[†]A questo proposito, occorre essere certi che $B_t(\omega)$ sia congiuntamente misurabile in (t,ω), cioè che la funzione $(t,\omega)\mapsto B_t(\omega)$ da $[0,1]\times\Omega$ in $\mathbb{R}$ sia misurabile. Questo segue dal fatto che le traiettorie di B sono q.c. continue, come verrà mostrato nel seguito del corso.

(b) Dato che $B_0 = 0$ q.c., si ha che $Z := \inf_{t\in[0,1]} B_t \leq 0$ q.c., cioè $\mathrm{P}(Z \leq 0) = 1$. L'unico caso di legge normale con questa proprietà è costituito dalla delta di Dirac in $\mu \leq 0$ (perché?), quindi si dovrebbe avere $Z \sim N(\mu, 0)$, cioè $Z = \mu$ q.c.. Ma questo è impossibile, perché, qualunque sia μ, si ha che $\mathrm{P}(Z < \mu - 1) \geq \mathrm{P}(B_1 < \mu - 1) > 0$, essendo $B_1 \sim N(0,1)$.

Soluzione 2. (a) Per la disuguaglianza di Chebychev, usando la relazione richiamata nel testo dell'esercizio si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon) \;&\leq\; \frac{\mathrm{E}[(S_{\pi^{(n)}} - t)^2]}{\varepsilon^2} \;=\; \frac{c}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{k_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})^2 \\ &\leq\; \frac{c}{\varepsilon^2} \, |\pi^{(n)}| \sum_{i=1}^{k_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) \;=\; \frac{c\,t}{\varepsilon^2} \, |\pi^{(n)}| \,,\end{aligned}$$

e dato che $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\pi^{(n)}| < \infty$ per ipotesi, anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon) < \infty$.

(b) Definiamo l'evento

$$A_\varepsilon \;:=\; \{|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon \text{ per infiniti } n\} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \{|S_{\pi^{(n)}} - t| > \varepsilon\} \,.$$

Grazie al punto precedente, per il lemma di Borel-Cantelli si ha $\mathrm{P}(A_\varepsilon) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$. Definendo $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{k}}$, si ha dunque $\mathrm{P}(A) = 0$ e quindi $\mathrm{P}(A^c) = 1$. D'altro canto, se $\omega \in A^c$, per costruzione vale che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 = n_0(\omega)$ tale che $|S_{\pi^{(n)}}(\omega) - t| \leq \varepsilon$ per $n \geq n_0(\omega)$ (perché?). Quindi $S_{\pi^{(n)}}(\omega) \to t$ per $n \to \infty$ quando $\omega \in A^c$, e l'esercizio è concluso.

Soluzione 3. (a) Essendo le componenti di β trasformazioni lineari delle componenti di B, segue immediatamente che, per qualunque matrice L, il processo β è gaussiano con media nulla e traiettorie q.c. continue. La funzione covarianza si calcola facilmente: dato che $\beta_s^{(i)} := (LB_s)^{(i)} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \, B_s^{(k)}$, segue che

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\beta_s^{(i)}, \beta_t^{(j)}) \;&=\; \mathrm{E}(\beta_s^{(i)} \beta_t^{(j)}) \;=\; \sum_{k,l=1}^n L_{ik} \, L_{jl} \; \mathrm{E}(B_s^{(k)} B_t^{(l)}) \\ &=\; \min\{s,t\} \sum_{k,l=1}^n L_{ik} \, L_{jl} \, \delta_{kl} \;=\; \min\{s,t\} \, (L\,L^*)_{ij} \,.\end{aligned}$$

Si ha dunque che $\mathrm{Cov}(\beta_s^{(i)}, \beta_t^{(j)}) = \min\{s,t\} \, \delta_{ij}$ se e soltanto se $(L\,L^*)_{ij} = \delta_{ij}$ per ogni $1 \leq i,j \leq n$, cioè $L\,L^* = I_n$, cioè $L \in O(n)$.

(b) Si può applicare il punto precedente. Basta infatti completare i vettori x, y a una base ortonormale $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, in cui $z_1 = x$ e $z_2 = y$. Se indichiamo con L la matrice $n \times n$ la cui i-esima riga è data dal vettore z_i, la matrice L è ortogonale per costruzione, quindi il processo $\{\beta_t := LB_t\}_{t\geq 0}$ è

un moto browniano n-dimensionale per il punto precedente. In particolare, le sue componenti $\beta^{(1)}$ e $\beta^{(2)}$ sono moti browniani reali indipendenti. Dato che per costruzione $\beta_t^{(1)} = \langle z_1, B_t \rangle = \langle x, B_t \rangle$ e $\beta_t^{(2)} = \langle z_2, B_t \rangle = \langle y, B_t \rangle$, segue la tesi.