Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 4[†]

Esercizio 1. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale e definiamo le variabili

$$\tau_a \;:=\; \inf\{t \geq 0 : \, B_t = a\}\,, \qquad S_t \;:=\; \sup_{0\leq u\leq t} B_u\,.$$

Ricordiamo il principio di riflessione: $\mathrm{P}(S_t \geq a) = \mathrm{P}(\tau_a \leq t) = \mathrm{P}(|B_t| \geq a)$.

(a) Si ricavi la densità della variabile S_t.
[Si consideri innanzitutto la funzione di ripartizione di S_t.]

(b) Si mostri che vale la relazione $\mathrm{P}(\tau_a \leq t) = \mathrm{P}(|B_1| \geq \frac{a}{\sqrt{t}})$, per ogni $a, t > 0$.

(c) (*) Si deduca che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

(d) Si determini la densità della variabile τ_a. Quanto vale $\mathrm{E}(\tau_a)$?

(e) (*) Si mostri in dettaglio come dal punto (b) segue che, q.c.,

$$\limsup_{t\to\infty} B_t \;=\; +\infty\,, \qquad \liminf_{t\to\infty} B_t \;=\; -\infty\,.$$

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale, di cui indichiamo con $\mathcal{G}_t := \sigma(\{B_u\}_{0\leq u\leq t})$ la filtrazione naturale. Supponiamo per semplicità che le traiettorie $t \mapsto B_t(\omega)$ siano continue *per ogni* $\omega \in \Omega$ (e non solo q.c.). Definiamo

$$A_n \;:=\; \left\{ \sup_{0\leq u\leq \frac{1}{n}} B_u > 0 \right\}, \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}\,, \qquad A \;:=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\,.$$

Ci si convinca che l'evento A può essere descritto come "in ogni intorno destro di 0 il moto browniano assume valori strettamente positivi".

(a) Si mostri che $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e dunque $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$ (perché?).

(b) Si spieghi perché $A_n \supseteq \{B_{\frac{1}{n}} > 0\}$. Si deduca che $\mathrm{P}(A) \geq \frac{1}{2}$.

(c) Si spieghi perché $A \in \mathcal{G}_{0+}$. Si deduca che $\mathrm{P}(A) = 1$.

(d) Si mostri che $\mathrm{P}(C) = 1$, dove $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\inf_{0\leq u\leq \frac{1}{n}} B_u < 0\}$.

(e) (*) Si mostri in dettaglio che, per q.o. $\omega \in \Omega$, esistono due successioni $\{s_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $s_n(\omega) \downarrow 0$ e $t_n(\omega) \downarrow 0$ per $n \to \infty$, con la proprietà che $B_{s_n(\omega)}(\omega) < 0$ e $B_{t_n(\omega)}(\omega) > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 (Trivialità di coda per il moto browniano)**.** (*) Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Per $t \geq 0$ definiamo la σ-algebra $\mathcal{H}_t := \sigma(\{B_u\}_{u\in[t,\infty)})$. Si noti che $\mathcal{H}_t$ è *decrescente* in t. Definiamo la σ-algebra di coda ponendo $\mathcal{H}_\infty := \bigcap_{t\geq 0} \mathcal{H}_t$. Si dimostri che $\mathcal{H}_\infty$ è banale: per ogni $A \in \mathcal{H}_\infty$ si ha $\mathrm{P}(A) = 0$ oppure $\mathrm{P}(A) = 1$.
[*Sugg.*: dedurre il risultato dalla legge 0–1 di Blumenthal applicata a ...]

[†]Ultima modifica: 8 febbraio 2011.