Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 5[†]

Esercizio 1. Sia $B = \{B_t\}_{t \ge 0}$ un moto browniano reale. Definiamo la variabile aleatoria $\tau := \tau_{-a,b} := \inf\{s \ge 0 : \, B_s \notin (-a, b)\}$, per $a, b > 0$. Sappiamo che τ è un tempo d'arresto q.c. finito e inoltre

$$\mathrm{P}\big(B_\tau = -a\big) \;=\; \frac{b}{a+b}\,, \qquad \mathrm{P}\big(B_\tau = b\big) \;=\; \frac{a}{a+b}\,.$$

Ricordiamo che il processo $Q = \{Q_t := B_t^2 - t\}_{t \ge 0}$ è una martingala.

(a) Si ponga $\tau_n := \tau \wedge n$, per $n \in \mathbb{N}$. Si spieghi perché τ_n è un tempo d'arresto.

(b) Si mostri che $\mathrm{E}(B_{\tau_n}^2 - \tau_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) (*) Si mostri che $\mathrm{E}(B_\tau^2 - \tau) = 0$.

(d) (*) Si mostri che $\mathrm{E}(\tau) = ab$.

Esercizio 2. Usiamo le stesse notazioni dell'esercizio precedente Ricordiamo che $M = \{M_t := e^{\gamma B_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t}\}_{t \ge 0}$ è una martingala, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, e che $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(a) Si mostri che $\mathrm{E}(M_\tau) = 1$, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) (*) Ponendo $\alpha := \mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \tau} \mathbf{1}_{\{B_\tau = -a\}})$ e $\beta := \mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \tau} \mathbf{1}_{\{B_\tau = b\}})$, si mostri che vale la relazione $e^{-\gamma a}\alpha + e^{\gamma b}\beta = 1$, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.

(c) (*) Sfruttando la simmetria $\gamma \to -\gamma$, si deduca che

$$\mathrm{E}(e^{-\lambda \tau}) \;=\; \frac{\sinh(\sqrt{2\lambda}\, a) \,+\, \sinh(\sqrt{2\lambda}\, b)}{\sinh(\sqrt{2\lambda}\,(a+b))}\,, \qquad \forall \lambda \ge 0\,.$$

Esercizio 3. Sia $B = \{B_t\}_{t \ge 0}$ un moto browniano reale, definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Introduciamo l'insieme degli zeri $Z = Z(\omega)$ del moto browniano, ponendo

$$Z(\omega) \;:=\; \big\{s \in [0, \infty) : \, B_s(\omega) = 0\big\}\,.$$

(a) Si mostri che, per ogni $t > 0$ fissato, q.c. $t \notin Z$ (cioè $\mathrm{P}(t \in Z) = 0$).

(b) Si deduca che q.c. $Z \cap (\mathbb{Q} \cap (0, \infty)) = \emptyset$.

(c) Si mostri che q.c. 0 è un punto di accumulazione di Z, cioè esiste una successione di punti in Z che converge a 0.

(d) (*) Si mostri che q.c. Z è un insieme chiuso.
[*Sugg.*: Non serve fare nessun calcolo!]

(e) (*) Si mostri che q.c. Z ha misura di Lebesgue nulla.
[*Sugg.*: la misura di Lebesgue di un insieme $C \subseteq [0, \infty)$ vale $m(C) = \int_0^\infty \mathbf{1}_C(s)\, \mathrm{d}s$.]

[†]Ultima modifica: 2 febbraio 2011.