Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 5[†]

Esercizio 1. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Definiamo la variabile aleatoria $\tau := \tau_{-a,b} := \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a,b)\}$, per $a, b > 0$. Sappiamo che τ è un tempo d'arresto q.c. finito e inoltre

$$\mathrm{P}\big(B_\tau = -a\big) \;=\; \frac{b}{a+b}\,, \qquad \mathrm{P}\big(B_\tau = b\big) \;=\; \frac{a}{a+b}\,.$$

Ricordiamo che il processo $Q = \{Q_t := B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ è una martingala.

(a) Si ponga $\tau_n := \tau \wedge n$, per $n \in \mathbb{N}$. Si spieghi perché τ_n è un tempo d'arresto.

(b) Si mostri che $\mathrm{E}(B_{\tau_n}^2 - \tau_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) (*) Si mostri che $\mathrm{E}(B_\tau^2 - \tau) = 0$.

(d) (*) Si mostri che $\mathrm{E}(\tau) = ab$.

Esercizio 2. Usiamo le stesse notazioni dell'esercizio precedente Ricordiamo che $M = \{M_t := e^{\gamma B_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t}\}_{t\geq 0}$ è una martingala, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, e che $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(a) Si mostri che $\mathrm{E}(M_\tau) = 1$, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) (*) Ponendo $\alpha := \mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\tau}1_{\{B_\tau=-a\}})$ e $\beta := \mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\tau}1_{\{B_\tau=b\}})$, si mostri che vale la relazione $e^{-\gamma a}\alpha + e^{\gamma b}\beta = 1$, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.

(c) (*) Sfruttando la simmetria $\gamma \to -\gamma$, si deduca che

$$\mathrm{E}(e^{-\lambda\tau}) \;=\; \frac{\sinh(\sqrt{2\lambda}\,a) \,+\, \sinh(\sqrt{2\lambda}\,b)}{\sinh(\sqrt{2\lambda}\,(a+b))}\,, \qquad \forall \lambda \geq 0\,.$$

Esercizio 3. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale, definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Introduciamo l'insieme degli zeri $Z = Z(\omega)$ del moto browniano, ponendo

$$Z(\omega) \;:=\; \big\{s \in [0,\infty) : B_s(\omega) = 0\big\}\,.$$

(a) Si mostri che, per ogni $t > 0$ fissato, q.c. $t \notin Z$ (cioè $\mathrm{P}(t \in Z) = 0$).

(b) Si deduca che q.c. $Z \cap (\mathbb{Q} \cap (0,\infty)) = \emptyset$.

(c) Si mostri che q.c. 0 è un punto di accumulazione di Z, cioè esiste una successione di punti in Z che converge a 0.

(d) (*) Si mostri che q.c. Z è un insieme chiuso.
[*Sugg.*: Non serve fare nessun calcolo!]

(e) (*) Si mostri che q.c. Z ha misura di Lebesgue nulla.
[*Sugg.*: la misura di Lebesgue di un insieme $C \subseteq [0,\infty)$ vale $m(C) = \int_0^\infty 1_C(s)\,\mathrm{d}s$.]

[†]Ultima modifica: 2 febbraio 2011.

Soluzione 1. (a) τ_n è il minimo dei due tempi d'arresto n e τ.

(b) Applicando il teorema d'arresto alla martingala Q, per il tempo d'arresto limitato τ_n, si ha che $\mathrm{E}(Q_0) = \mathrm{E}(Q_{\tau_n})$, cioè $0 = \mathrm{E}(B_{\tau_n}^2 - \tau_n)$

(c) Per $n \to \infty$ si ha che q.c. (anzi per ogni $\omega \in \Omega$) $\tau_n \to \tau$. Ricordando che $\tau < \infty$ q.c., segue che $B_{\tau_n} \to B_\tau$ q.c.. Dato che $|B_{\tau_n}| \leq \max\{a,b\}$, per convergenza dominata si ha $\mathrm{E}(B_{\tau_n}) \to \mathrm{E}(B_\tau)$. Dato che τ_n è crescente, per convergenza monotona si ha $\mathrm{E}(\tau_n) \to \mathrm{E}(\tau)$. Dal punto precedente si ha dunque che $\mathrm{E}(B_\tau^2 - \tau) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(B_{\tau_n}^2 - \tau_n) = 0$.

(d) Dal punto precedente e dalla legge di B_τ si ha che

$$\mathrm{E}(\tau) \;=\; \mathrm{E}(B_\tau^2) \;=\; a^2\,\mathrm{P}(B_\tau = -a) + b^2\,\mathrm{P}(B_\tau = b) \;=\; \frac{a^2 b}{a+b} + \frac{b^2 a}{a+b} \;=\; ab\,.$$

Soluzione 2. (a) Per $t \leq \tau$ si ha chiaramente $B_t \leq \max\{a,b\}$, di conseguenza $|M_{\tau\wedge t}| \leq e^{\gamma\max\{a,b\}}$. Dato che τ è q.c. finito, siamo nelle condizioni di applicare il teorema d'arresto e dunque $\mathrm{E}(M_\tau) = \mathrm{E}(M_0) = 1$.

(b) Si noti che

$$\mathrm{E}(M_\tau^\gamma) \;=\; \mathrm{E}(e^{\gamma B_\tau - \frac{1}{2}\gamma^2\tau}) \;=\; e^{-\gamma a}\,\mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\tau}1_{\{B_\tau=-a\}}) + e^{\gamma b}\,\mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\tau}1_{\{B_\tau=b\}})\,,$$

e dal punto precedente si ricava $e^{-\gamma a}\alpha + e^{\gamma b}\beta = 1$, per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$.

(c) Riscrivendo la relazione ricavata nel punto precedente per γ e $-\gamma$, abbiamo che

$$\begin{cases} e^{-\gamma a}\alpha \,+\, e^{\gamma b}\beta \;=\; 1 \\ e^{\gamma a}\alpha \,+\, e^{-\gamma b}\beta \;=\; 1 \end{cases}.$$

Con un po' di algebra si ricava

$$\alpha \;=\; \frac{\sinh(\gamma b)}{\sinh(\gamma(a+b))}\,, \qquad \beta \;=\; \frac{\sinh(\gamma a)}{\sinh(\gamma(a+b))}\,,$$

da cui

$$\mathrm{E}(e^{-\frac{1}{2}\gamma^2\tau}) \;=\; \alpha + \beta \;=\; \frac{\sinh(\gamma a) \,+\, \sinh(\gamma b)}{\sinh(\gamma(a+b))}\,.$$

Ponendo $\gamma = \sqrt{2\lambda}$ si ottiene la formula voluta.

Soluzione 3. (a) $\mathrm{P}(t \in Z) = \mathrm{P}(B_t = 0) = 0$ perché $B_t \sim N(0,t)$.

(b) L'evento $\{Z \cap (\mathbb{Q} \cap (0,\infty)) \neq \emptyset\} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}\{t \in Z\}$ è unione numerabile di eventi con probabilità nulla, dunque ha probabilità nulla.

(c) Sappiamo che q.c. il moto browniano cambia segno infinite volte in ogni intorno destro dell'origine: per la continuità delle traiettorie, q.c. esiste una successione $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{t_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $t_n \downarrow 0$ e $B_{t_n} = 0$, cioè $t_n \in Z$.

(d) Sappiamo che per q.o. ω la funzione $t \mapsto B_t(\omega)$ è continua, quindi l'insieme $Z(\omega)$ è chiuso, essendo controimmagine dell'insieme chiuso $\{0\}$.

(e) Per il teorema di Fubini, $\mathrm{E}(m(Z)) = \int_0^\infty \mathrm{E}(\mathbb{1}_Z(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathrm{P}(s \in Z)\,\mathrm{d}s = 0$. Dato che $m(Z) \geq 0$, segue che $m(Z) = 0$ q.c..