Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 6[†]

Esercizio 1 (Integrale di Wiener)**.** Sia $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano reale definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Vogliamo costruire l'integrale

$$J(f) := \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{d}B_t$$

per integrandi *deterministici*, cioè per *funzioni* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Cominciamo a considerare il sottospazio $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^+)$ delle funzioni *semplici*, cioè della forma $f(s) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s)$ con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ e con $c_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, \ldots, k-1$. Data $f \in \mathcal{S}$ di questa forma, poniamo

$$J(f) \;:=\; \int_0^\infty f(s)\, \mathrm{d}B_s \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\,.$$

In questo modo $J(f)$ è una variabile aleatoria reale definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Ricordiamo che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale denso in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

(a) Si mostri che per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha $J(f) \sim N(0, \sigma^2)$, con $\sigma^2 = \int_0^\infty f(s)^2\, \mathrm{d}s$.

(b) Si mostri che l'operatore $J : \mathcal{S} \to L^2(\Omega)$ è lineare e isometrico.
[Le norme sugli spazi sono le solite: $\|f\|_2^2 := \int_0^\infty f(s)^2\, \mathrm{d}s$ e $\|X\|_{L^2(\Omega)}^2 := \mathrm{E}(X^2)$.]

(c) Si deduca che esiste un'estensione $J : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\Omega)$ lineare e isometrica, tale che $\mathrm{E}(J(f)) = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(d) (*) Si mostri che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, la variabile aleatoria $J(f)$ è normale.
[*Sugg.* Si prenda una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni in $\mathcal{S}$ tale che $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$ ...]

(e) Si concluda che $J(f) \sim N(0, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = \int_0^\infty f(s)^2\, \mathrm{d}s$, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(f) Si mostri che $\mathrm{Cov}(J(f), J(g)) = \int_0^\infty f(s)\, g(s)\, \mathrm{d}s$, per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
[*Sugg.* Polarizzazione.]

Esercizio 2. Dato un moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$, si calcolino

$$\mathrm{E}\Big(\big(\textstyle\int_0^t B_s\, \mathrm{d}B_s\big)^2\Big)\,, \qquad \mathrm{E}\Big(\big(\textstyle\int_0^t B_s\, \mathrm{d}B_s\big)\big(\textstyle\int_0^t g(s)\, \mathrm{d}B_s\big)\Big)\,, \qquad \mathrm{E}\Big(B_1\big(\textstyle\int_0^t B_s^2\, \mathrm{d}B_s\big)\Big)\,,$$

dove $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
[*Sugg.* Si usi l'isometria dell'integrale stocastico.]

[†]Ultima modifica: 25 febbraio 2011.