Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 6[†]

Esercizio 1 (Integrale di Wiener)**.** Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Vogliamo costruire l'integrale

$$J(f) := \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}B_t$$

per integrandi *deterministici*, cioè per *funzioni* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Cominciamo a considerare il sottospazio $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^+)$ delle funzioni *semplici*, cioè della forma $f(s) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)$ con $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$ e con $c_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, \ldots, k-1$. Data $f \in \mathcal{S}$ di questa forma, poniamo

$$J(f) \;:=\; \int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}B_s \;:=\; \sum_{i=0}^{k-1} c_i\,(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\,.$$

In questo modo $J(f)$ è una variabile aleatoria reale definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Ricordiamo che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale denso in $L^2(\mathbb{R}^+)$.

(a) Si mostri che per ogni $f \in \mathcal{S}$ si ha $J(f) \sim N(0,\sigma^2)$, con $\sigma^2 = \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s$.

(b) Si mostri che l'operatore $J : \mathcal{S} \to L^2(\Omega)$ è lineare e isometrico.
[Le norme sugli spazi sono le solite: $\|f\|_2^2 := \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s$ e $\|X\|^2_{L^2(\Omega)} := \mathrm{E}(X^2)$.]

(c) Si deduca che esiste un'estensione $J : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\Omega)$ lineare e isometrica, tale che $\mathrm{E}(J(f)) = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(d) (*) Si mostri che, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, la variabile aleatoria $J(f)$ è normale.
[*Sugg.* Si prenda una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni in $\mathcal{S}$ tale che $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$ ...]

(e) Si concluda che $J(f) \sim N(0,\sigma^2)$ con $\sigma^2 = \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s$, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(f) Si mostri che $\mathrm{Cov}(J(f), J(g)) = \int_0^\infty f(s)\,g(s)\,\mathrm{d}s$, per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
[*Sugg.* Polarizzazione.]

Esercizio 2. Dato un moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, si calcolino

$$\mathrm{E}\Big(\big(\textstyle\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s\big)^2\Big)\,, \qquad \mathrm{E}\Big(\big(\textstyle\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s\big)\big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s\big)\Big)\,, \qquad \mathrm{E}\Big(B_1\big(\textstyle\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}B_s\big)\Big)\,,$$

dove $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
[*Sugg.* Si usi l'isometria dell'integrale stocastico.]

[†] Ultima modifica: 25 febbraio 2011.

Soluzione 1. (a) $J(f)$ è normale per ogni $f \in \mathcal{S}$, in quanto combinazione lineare delle componenti del processo gaussiano $\{B_t\}_{t\geq 0}$: $J(f) \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ e resta da calcolare μ e σ^2. Dato che $\mathrm{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0$ segue che $\mu = 0$. Per l'indipendenza degli incrementi del moto browniano si ha $\mathrm{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = 0$ per $i \neq j$ mentre $\mathrm{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = t_{i+1} - t_i$, da cui

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i^2\ \mathrm{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) \;+\; 2 \sum_{0\leq i<j\leq k-1} c_i\,c_j\ \mathrm{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} c_i^2\,(t_{i+1} - t_i) \;=\; \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

(b) La linearità è evidente, l'isometria è stata dimostrata nel punto precedente, in quanto $\|J(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = \mathrm{E}((J(f))^2) = \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s = \|f\|_2^2$ per ogni $f \in \mathcal{S}$.

(c) L'esistenza dell'estensione lineare e isometrica di J allo spazio $L^2(\mathbb{R}^+)$ segue dal teorema visto a lezione. Di conseguenza, data $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e date $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ tali che $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$, si ha $J(f_n) \to J(f)$ in $L^2(\Omega)$ (infatti $\|J(f_n) - J(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|f_n - f\|_2 \to 0$). Dato che la convergenza in $L^2(\Omega)$ implica la convergenza dei valori attesi e dato che $\mathrm{E}(J(f_n)) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come dimostrato nel punto (a), segue che $\mathrm{E}(J(f)) = 0$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(d) Come già osservato, date $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ tali che $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$, si ha $J(f_n) \to J(f)$ in $L^2(\Omega)$. Abbiamo già mostrato che $J(f_n)$ è normale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque $J(f)$ è normale in quanto limite in $L^2(\Omega)$ di variabili normali.

(e) Segue direttamente dai due punti precedenti che $J(f) \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, con $\mu = \mathrm{E}(J(f)) = 0$ e $\sigma^2 = \mathrm{E}(J(f)^2) = \|J(f)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|_2^2 = \int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s$, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

(f) Per il punto precedente si ha $\mathrm{E}(J(f+g)^2) = \|f+g\|_2^2$ e $\mathrm{E}(J(f-g)^2) = \|f-g\|_2^2$, per cui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(J(f), J(g)) &= \mathrm{E}(J(f)J(g)) \;=\; \frac{1}{4}\big(\mathrm{E}(J(f+g)^2) - \mathrm{E}(J(f-g)^2)\big)\\
&= \frac{1}{4}\big(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2\big)\\
&= \frac{1}{4}\big(\langle f+g, f+g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \langle f-g, f-g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}\big)\\
&= \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)} \;=\; \int_0^\infty f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 2. Per l'isometria dell'integrale stocastico e il teorema di Fubini si ha

$$\mathrm{E}\left(\left(\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \;=\; \int_0^t \mathrm{E}(B_s^2)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^t s\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{t^2}{2}\,.$$

Analogamente

$$\mathrm{E}\left(\left(\int_0^t B_s\,\mathrm{d}B_s\right)\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s\right)\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t B_s\,g(s)\,\mathrm{d}s\right) \;=\; \int_0^t \mathrm{E}(B_s)\,g(s)\,\mathrm{d}s \;=\; 0\,.$$

Infine, sia $T > \max(t,1)$ e scriviamo

$$B_1 = \int_0^T 1_{[0,1)}(s)\,\mathrm{d}B_s\,, \qquad \int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}B_s = \int_0^T B_s^2\,1_{[0,t)}(s)\,\mathrm{d}B_s\,.$$

Ricordando che $\mathrm{E}((\int_0^T X_s\,\mathrm{d}B_s)(\int_0^T Y_s\,\mathrm{d}B_s)) = \mathrm{E}(\int_0^T X_s\,Y_s\,\mathrm{d}s)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(B_1\left(\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}B_s\right)\right) \;&=\; \mathrm{E}\left(\int_0^T 1_{[0,1)}(s)\,B_s^2\,1_{[0,t)}(s)\,\mathrm{d}s\right)\\ &=\; \int_0^T \mathrm{E}(B_s^2)\,1_{[0,t\wedge 1)}(s)\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{t\wedge 1} s\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{t^2\wedge 1}{2}\,.\end{aligned}$$