

Esercizio 1. Sia $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano reale e definiamo i processi X, Y ponendo $X_t := \cos(B_t)$ e $Y_t := \sin(B_t)$.

(a) Si mostri che i processi soddisfano le equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} dX_t = -Y_t dB_t - \frac{1}{2} X_t dt \\ dY_t = X_t dB_t - \frac{1}{2} Y_t dt \\ X_0 = 1, \quad Y_0 = 0 \end{cases}.$$

(b) Si deduca che $M = \{M_t := X_t + \frac{1}{2} \int_0^t X_s ds\}_{t \geq 0}$ è una martingala in L^2 .

(c) Introducendo il processo a valori complessi $Z_t := e^{iB_t} = \cos(B_t) + i \sin(B_t)$, si ricavi dal punto (a) che Z soddisfa l'equazione

$$dZ_t = i Z_t dB_t - \frac{1}{2} Z_t dt.$$

Si noti che questa equazione si può ottenere applicando la formula di Itô alla funzione complessa $\Phi(x) = e^{ix}$.

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un moto browniano reale e siano $a, b > 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$. Introduciamo il processo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ definito da

$$X_t = e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t} \cos\left(\vartheta\left(B_t - \frac{b-a}{2}\right)\right).$$

(a) Usando la formula di Itô, si dimostri che X è una martingala.

(b) Indicando con $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-a, b)\}$ il tempo di uscita di B dall'intervallo $(-a, b)$, si spieghi perché si ha $X_\tau = e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 \tau} \cos(\vartheta(\frac{a+b}{2}))$.

(c) (*) Si assuma che $E(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 \tau}) < \infty$. Si mostri che si può applicare il teorema d'arresto a X e si deduca che

$$E(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 \tau}) = \frac{\cos(\vartheta(\frac{a-b}{2}))}{\cos(\vartheta(\frac{a+b}{2}))}.$$

Esercizio 3 (Processo di Ornstein-Uhlenbeck). Dato un moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$, introduciamo il processo stocastico $V = \{V_t\}_{t \geq 0}$ definito da

$$V_t := e^{-bt} \left(v_0 + \sigma \int_0^t e^{bu} dB_u \right),$$

dove $b, \sigma > 0$ e $v_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si spieghi perché V è un processo di Itô.

[Sugg.: si esprima $V_t = \Phi(t, X_t)$ per un opportuno processo X .]

[†]Ultima modifica: 3 marzo 2011.

(b) Si mostri che V risolve l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dV_t = \sigma dB_t - b V_t dt \\ V_0 = v_0 \end{cases}.$$

(c) Si mostri che $E(V_t) = v_0 e^{-bt}$ e $\text{Cov}(V_s, V_t) = \frac{\sigma^2}{2b} (e^{-b|t-s|} - e^{-b(t+s)})$.

Si noti che l'integrale stocastico che compare nella definizione di V_t è una variabile gaussiana, per ogni $t \geq 0$, perché l'integrando è deterministico (cf. foglio di esercizi n. 6). È anzi facile mostrare (esercizio per chi vuole) che V è *un processo gaussiano*.

(d) Sia $U = \{U_t\}_{t \geq 0}$ il processo definito da

$$U_t := e^{-bt} \left(v_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2b}} (B_{e^{2bt}} - B_1) \right).$$

Si mostri che i processi U e V hanno la stessa legge (cioè le loro leggi finito-dimensionali coincidono).

Esercizio 4. Per il processo $\{X_t = \exp((b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)\}_{t \geq 0}$ (*moto browniano geometrico*), si determinino $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t$ e $\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t$ in funzione di b e σ .