Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 7[†]

Esercizio 1. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale e definiamo i processi X, Y ponendo $X_t := \cos(B_t)$ e $Y_t := \sin(B_t)$.

(a) Si mostri che i processi soddisfano le equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t \;=\; -Y_t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}\,X_t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_t \;=\; X_t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}\,Y_t\,\mathrm{d}t \\ X_0 \;=\; 1\,, \quad Y_0 \;=\; 0 \end{cases} .$$

(b) Si deduca che $M = \{M_t := X_t + \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s\}_{t\geq 0}$ è una martingala in L^2.

(c) Introducendo il processo a valori complessi $Z_t := e^{iB_t} = \cos(B_t) + i\,\sin(B_t)$, si ricavi dal punto (a) che Z soddisfa l'equazione

$$\mathrm{d}Z_t \;=\; i\,Z_t\,\mathrm{d}B_t \,-\, \frac{1}{2}\,Z_t\,\mathrm{d}t\,.$$

Si noti che questa equazione si può ottenere applicando la formula di Itô alla funzione complessa $\Phi(x) = e^{ix}$.

Esercizio 2. Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto browniano reale e siano $a, b > 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$. Introduciamo il processo $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ definito da

$$X_t \;=\; e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\cos\left(\vartheta(B_t - \tfrac{b-a}{2})\right).$$

(a) Usando la formula di Itô, si dimostri che X è una martingala.

(b) Indicando con $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (-a, b)\}$ il tempo di uscita di B dall'intervallo $(-a, b)$, si spieghi perché si ha $X_\tau \;=\; e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau}\cos(\vartheta(\frac{a+b}{2}))$.

(c) (*) Si assuma che $\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau}) < \infty$. Si mostri che si può applicare il teorema d'arresto a X e si deduca che

$$\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau}) \;=\; \frac{\cos(\vartheta(\frac{a-b}{2}))}{\cos(\vartheta(\frac{a+b}{2}))}\,.$$

Esercizio 3 (Processo di Ornstein-Uhlenbeck)**.** Dato un moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$, introduciamo il processo stocastico $V = \{V_t\}_{t\geq 0}$ definito da

$$V_t \;:=\; e^{-bt}\left(v_0 \,+\, \sigma\int_0^t e^{bu}\,\mathrm{d}B_u\right),$$

dove $b, \sigma > 0$ e $v_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si spieghi perché V è un processo di Itô.
[*Sugg.*: si esprima $V_t = \Phi(t, X_t)$ per un opportuno processo X.]

[†]Ultima modifica: 3 marzo 2011.

(b) Si mostri che V risolve l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} \mathrm{d}V_t \;=\; \sigma\,\mathrm{d}B_t \,-\, b\,V_t\,\mathrm{d}t \\ V_0 = v_0 \end{cases}.$$

(c) Si mostri che $\mathrm{E}(V_t) = v_0\,e^{-bt}$ e $\mathrm{Cov}(V_s, V_t) = \frac{\sigma^2}{2b}\,(e^{-b|t-s|} - e^{-b(t+s)})$.

Si noti che l'integrale stocastico che compare nella definizione di V_t è una variabile gaussiana, per ogni $t \geq 0$, perché l'integrando è deterministico (cf. foglio di esercizi n. 6). È anzi facile mostrare (esercizio per chi vuole) che V *è un processo gaussiano.*

(d) Sia $U = \{U_t\}_{t\geq 0}$ il processo definito da

$$U_t \;:=\; e^{-bt}\left(v_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{2b}}\,(B_{e^{2bt}} - B_1)\right).$$

Si mostri che i processi U e V hanno la stessa legge (cioè le loro leggi finito-dimensionali coincidono).

Esercizio 4. Per il processo $\{X_t = \exp((b - \frac{1}{2}\,\sigma^2)\,t \,+\, \sigma\,B_t)\}_{t\geq 0}$ (*moto browniano geometrico*), si determinino $\limsup_{t\to\infty} X_t$ e $\liminf_{t\to\infty} X_t$ in funzione di b e σ.

Soluzione 1. (a) È un'applicazione immediata della formula di Itô.

(b) Dato che $X_0 = 1$, dal punto precedente (o direttamente dalla formula di Itô) si ha

$$M_t \;:=\; X_t \,+\, \int_0^t X_s\,\mathrm{d}s \;=\; 1 \,-\, \int_0^t \sin(B_s)\,\mathrm{d}B_s\,.$$

Sappiamo che l'integrale stocastico è una martingala locale, quindi anche $\{M_t\}_{t\geq 0}$ lo è. Per concludere che è una martingala in L^2, basta osservare che l'integrando è in $\mathcal{M}^2$, poiché $\mathrm{E}(\int_0^t \sin(B_s)^2\,\mathrm{d}s) \leq \int_0^t \mathrm{d}s = t < \infty$.

(c) Segue direttamente dal punto (a).

Soluzione 2. (a) Ponendo $\Phi(t,x) := e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\,\cos(\vartheta(x - \frac{b-a}{2}))$, possiamo scrivere $X_t = \Phi(t, B_t)$ e per la formula di Itô

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,B_t)\,\mathrm{d}t \,+\, \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,B_t)\,\mathrm{d}B_t \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,B_t)\,\mathrm{d}t \\
&=\; e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\bigg\{\frac{1}{2}\vartheta^2\,\cos\big(\vartheta\big(B_t - \tfrac{b-a}{2}\big)\big)\,\mathrm{d}t \,-\, \vartheta\,\sin\big(\vartheta\big(B_t - \tfrac{b-a}{2}\big)\big)\,\mathrm{d}B_t \\
&\qquad\qquad -\, \frac{1}{2}\,\vartheta^2\,\cos\big(\vartheta\big(B_t - \tfrac{b-a}{2}\big)\big)\,\mathrm{d}t\bigg\} \\
&=\; -\vartheta\,e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\,\sin\big(\vartheta(B_t - \tfrac{b-a}{2})\big)\,\mathrm{d}B_t\,,
\end{aligned}$$

da cui segue che il processo X è una martingala locale. Dato che

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T \left|\vartheta\, e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t} \sin\left(\vartheta(B_t - \tfrac{b-a}{2})\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right) \;\le\; \vartheta \int_0^T e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{\vartheta}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 T} - 1\right) \;<\; \infty\,,$$

per ogni $T > 0$, l'integrando è in $\mathcal{M}^2$ e dunque X è una martingala di quadrato integrabile (non solo una martingala locale).

(b) Per la continuità delle traiettorie del moto browniano, si ha che $B_\tau \in \{-a, b\}$, quindi $B_\tau - \frac{b-a}{2} \in \{-\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\}$ e dato che il coseno è una funzione pari segue che $X_\tau = e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau} \cos\left(\vartheta(\frac{a+b}{2})\right)$.

(c) Dato che X è una martingala e τ un tempo d'arresto, possiamo applicare il teorema d'arresto al tempo d'arresto limitato $\tau \wedge t$, ottenendo

$$\mathrm{E}(X_0) \;=\; \mathrm{E}(X_{\tau\wedge t})\,. \tag{0.1}$$

per ogni $t \ge 0$. Si osservi che $X_0 = \cos\left(\vartheta(\frac{b-a}{2})\right)$, e ricordando il punto precedente si vede che la relazione cercata non è altro che $\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{E}(X_\tau)$. Dato che $\tau < \infty$ q.c., si ha $\lim_{t\to\infty} \tau \wedge t = \tau$ q.c., e quindi $\lim_{t\to\infty} X_{\tau\wedge t} = X_\tau$ q.c.. Occorre dunque mostrare che è possibile passare al limite $t \to \infty$ nella relazione (**??**). Questo segue dal teorema di convergenza dominata, perché $|X_{\tau\wedge t}| \le e^{\frac{1}{2}\vartheta^2(\tau\wedge t)} \le e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau}$, per ogni $t \ge 0$, e per ipotesi $\mathrm{E}(e^{\frac{1}{2}\vartheta^2\tau}) < \infty$.

Soluzione 3. (a) Posto $X_t := v_0 + \sigma \int_0^t e^{bu}\,\mathrm{d}B_u$ e $\Phi(t,x) := e^{-bt}x$, possiamo scrivere $V_t = \Phi(t, X_t)$. Dato che Φ è di classe $C^{1,2}$, segue dalla formula di Itô che V è un processo di Itô.

(b) Basta applicare la formula di Itô a $\Phi(t, X_t)$, con le notazioni del punto precedente. In alternativa, si può applicare la formula di integrazione per parti stocastica ai processi di Itô $X_t = v_0 + \sigma \int_0^t e^{bu}\,\mathrm{d}B_u$ e $Y_t = e^{-bt}$. Dato che $\mathrm{d}X_t = \sigma\, e^{bt}\,\mathrm{d}B_t$ e $\mathrm{d}Y_t = -b\, e^{-bt}\,\mathrm{d}t$, si ha $\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t = 0$ e dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_t \;&=\; X_t\,\mathrm{d}Y_t \;+\; Y_t\,\mathrm{d}X_t \;+\; \mathrm{d}\langle X, Y\rangle_t \;=\; X_t\,\mathrm{d}Y_t \;+\; Y_t\,\mathrm{d}X_t \\ &= -b\, e^{-bt}\left(v_0 \;+\; \sigma \int_0^t e^{bu}\,\mathrm{d}B_u\right)\mathrm{d}t \;+\; e^{-bt}\,\sigma\, e^{bt}\,\mathrm{d}B_t \;=\; -b\, V_t\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma\,\mathrm{d}B_t\,.\end{aligned}$$

Questo mostra che il processo V risolve l'equazione data, visto che $V_0 = v_0$.

(c) Dato che l'integrale di Wiener ha media nulla, si ha $\mathrm{E}(V_t) = e^{-bt}\, v_0$. Usando la proprietà di isometria si ottiene per $s < t$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(V_t\, V_s) \;&=\; e^{-bt}\, e^{-bs}\, v_0^2 \;+\; \sigma^2\, e^{-b(s+t)} \int_0^s e^{2bu}\,\mathrm{d}u \;=\; v_0^2\, e^{-b(t+s)} \;+\; \frac{\sigma^2}{2b}\, e^{-b(t+s)}\left(e^{2bs} - 1\right) \\ &=\; v_0^2\, e^{-b(t+s)} \;+\; \frac{\sigma^2}{2b}\left(e^{-b(t-s)} - e^{-b(t+s)}\right),\end{aligned}$$

per cui $\mathrm{Cov}(V_s, V_t) = \mathrm{E}(V_s V_t) - \mathrm{E}(V_s)\,\mathrm{E}(V_t) = \frac{\sigma^2}{2b}\,(e^{-b(t-s)} - e^{-b(t+s)})$.

(d) Basta mostrare che i processi $V' = \{V'_t := \int_0^t e^{bu}\, \mathrm{d}B_u\}_{t\geq 0}$ e $U' = \{U'_t := \frac{1}{\sqrt{2b}}\,(B_{e^{2bt}} - B_1)\}_{t\geq 0}$ hanno la stessa legge. Essendo entrambi processi gaussiani di media nulla, basta mostrare che le covarianze coincidono. Come già calcolato nel punto precedente, per $s < t$ si ha

$$\mathrm{Cov}(V'_s, V'_t) \;=\; \mathrm{E}(V'_s V'_t) \;=\; \int_0^s e^{2bu}\, \mathrm{d}u \;=\; \frac{e^{2bs} - 1}{2b}\,.$$

Analogamente, per il processo U' si ha per $s < t$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(U'_s, U'_t)\\
&= \frac{1}{2b}\big(\,\mathrm{Cov}(B_{e^{2bs}}, B_{e^{2bt}}) - \mathrm{Cov}(B_1, B_{e^{2bt}}) - \mathrm{Cov}(B_{e^{2bs}}, B_1) + \mathrm{Cov}(B_1, B_1)\big)\\
&= \frac{1}{2b}(e^{2bs} - 1 - 1 + 1) \;=\; \frac{1}{2b}(e^{2bs} - 1)\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 4. Per la legge dei grandi numeri per il moto browniano, si ha $B_t/t \to 0$ q.c. per $t \to \infty$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste q.c. $t_0 = t_0(\omega) < \infty$ tale che per ogni $t \geq t_0$ si ha $|\sigma B_t/t| \leq \varepsilon$. Di conseguenza per $t \geq t_0$ si ha

$$\exp\left[\left(b - \frac{1}{2}\,\sigma^2 - \varepsilon\right)t\right] \;\leq\; X_t \;\leq\; \exp\left[\left(b - \frac{1}{2}\,\sigma^2 + \varepsilon\right)t\right].$$

È quindi chiaro che se $(b - \frac{1}{2}\,\sigma^2) > 0$ si ha $X_t \to +\infty$ q.c., mentre se $(b - \frac{1}{2}\,\sigma^2) < 0$ si ha $X_t \to 0$ q.c. (si osservi che $X_t \geq 0$). Infine, se $(b - \frac{1}{2}\,\sigma^2) = 0$ si ha $X_t = e^{\sigma\, B_t}$. Ricordando che q.c. $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ e $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$, segue che q.c. $\limsup_{t\to\infty} X_t = +\infty$ e $\liminf_{t\to\infty} X_t = 0$.