Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 8[†]

Esercizio 1. Sia $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un moto browniano reale, definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Per $n \in \mathbb{N}$ e $s, t > 0$ fissati, introduciamo i seguenti eventi:

$$A := \big\{u \mapsto B_u \text{ è derivabile in } u = 0\big\} = \left\{\exists \lim_{u\downarrow 0} \frac{B_u}{u} \in (-\infty, +\infty)\right\},$$
$$C_{n,s} := \big\{|B_s| \le ns\big\}, \qquad D_{n,t} := \big\{|B_u| \le nu\,,\ \forall u \in [0,t]\big\}.$$

Per questo esercizio non è possibile utilizzare né la legge del logaritmo iterato, né la non differenziabilità delle traiettorie del moto browniano.

(a) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, si ha $\mathrm{P}(C_{n,s}) \to 0$ per $s \downarrow 0$.

Facoltativo: si mostri che in effetti $\mathrm{P}(C_{n,s})/(2n\sqrt{s}) \to 1/\sqrt{2\pi}$ per $s \downarrow 0$ (con n fissato).

(b) Si spieghi perché per ogni $s \le t$ vale l'inclusione di eventi $D_{n,t} \subseteq C_{n,s}$.

(c) Si deduca che $\mathrm{P}(D_{n,t}) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$.

(d) (*) Si spieghi perché vale l'inclusione di eventi $A \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} D_{n,1/k}$.

(e) Si mostri che $\mathrm{P}(A) = 0$.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità filtrato standard su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Si consideri la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \dfrac{1}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t + \dfrac{X_t}{1+X_t^2}\,\mathrm{d}t \\ X_0 = 0 \end{cases}. \tag{0.1}$$

(a) Si mostri che, per ogni $T > 0$, esiste un processo continuo e adattato $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ definito su Ω che risolve l'equazione (0.1) e che tale processo è unico a meno di indistinguibilità.

Supporremo d'ora in avanti che $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ sia un processo continuo e adattato definito su Ω che risolve l'equazione (0.1) per ogni $t \in [0,\infty)$. Introduciamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\,. \tag{0.2}$$

Ricordiamo che $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sqrt{\pi}$. Definiamo il processo $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ponendo $Y_t := \varphi(X_t)$.

[†] Ultima modifica: 10 marzo 2011.

(b) Si mostri che Y è un processo di Itô con differenziale stocastico

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = \dfrac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t \\ Y_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}.$$

(c) Si deduca che Y è una martingala di quadrato integrabile.

Ricordiamo che $\langle Y\rangle_t = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-2X_s^2}}{1+X_s^2}\,\mathrm{d}s$.

(d) Si spieghi perché il processo $M = \{M_t\}_{t\in[0,\infty)}$ definito da $M_t := Y_t^2 - \langle Y\rangle_t$ è una martingala. Si deduca che per ogni tempo d'arresto τ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\mathrm{E}(Y_{\tau\wedge t}^2) - \mathrm{E}(\langle Y\rangle_{\tau\wedge t}) = \frac{\pi}{4}.$$

Consideriamo infine il tempo d'arresto $\tau := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq a\}$, dove $a > 0$ è un numero fissato.

(e) (*) Si giustifichino le seguenti disuguaglianze, valide per ogni $t \geq 0$:

$$Y_{\tau\wedge t}^2 \leq \pi, \qquad \langle Y\rangle_{\tau\wedge t} \geq \frac{e^{-2a^2}}{1+a^2}(\tau\wedge t).$$

Si deduca che $\mathrm{E}(\tau\wedge t) \leq e^{2a^2}(1+a^2)\frac{3\pi}{4}$, per ogni $t \geq 0$, e si concluda che $\mathrm{E}(\tau) < \infty$.