Analisi Stocastica 2010/11 – Foglio di esercizi n. 8[†]

Esercizio 1. Sia $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ un moto browniano reale, definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Per $n \in \mathbb{N}$ e $s, t > 0$ fissati, introduciamo i seguenti eventi:

$$A := \big\{u \mapsto B_u \text{ è derivabile in } u = 0\big\} = \left\{\exists \lim_{u\downarrow 0} \frac{B_u}{u} \in (-\infty, +\infty)\right\},$$
$$C_{n,s} := \big\{|B_s| \le ns\big\}, \qquad D_{n,t} := \big\{|B_u| \le nu\,,\ \forall u \in [0,t]\big\}.$$

Per questo esercizio non è possibile utilizzare né la legge del logaritmo iterato, né la non differenziabilità delle traiettorie del moto browniano.

(a) Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, si ha $\mathrm{P}(C_{n,s}) \to 0$ per $s \downarrow 0$.
   Facoltativo: si mostri che in effetti $\mathrm{P}(C_{n,s})/(2n\sqrt{s}) \to 1/\sqrt{2\pi}$ per $s \downarrow 0$ (con n fissato).

(b) Si spieghi perché per ogni $s \le t$ vale l'inclusione di eventi $D_{n,t} \subseteq C_{n,s}$.

(c) Si deduca che $\mathrm{P}(D_{n,t}) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$.

(d) (*) Si spieghi perché vale l'inclusione di eventi $A \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} D_{n,1/k}$.

(e) Si mostri che $\mathrm{P}(A) = 0$.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità filtrato standard su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$. Si consideri la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \dfrac{1}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t + \dfrac{X_t}{1+X_t^2}\,\mathrm{d}t \\ X_0 = 0 \end{cases} . \tag{0.1}$$

(a) Si mostri che, per ogni $T > 0$, esiste un processo continuo e adattato $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ definito su Ω che risolve l'equazione (0.1) e che tale processo è unico a meno di indistinguibilità.

Supporremo d'ora in avanti che $X = \{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ sia un processo continuo e adattato definito su Ω che risolve l'equazione (0.1) per ogni $t \in [0,\infty)$. Introduciamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\,. \tag{0.2}$$

Ricordiamo che $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sqrt{\pi}$. Definiamo il processo $Y = \{Y_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ponendo $Y_t := \varphi(X_t)$.

[†]Ultima modifica: 10 marzo 2011.

(b) Si mostri che Y è un processo di Itô con differenziale stocastico

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = \dfrac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t \\ Y_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases} .$$

(c) Si deduca che Y è una martingala di quadrato integrabile.

Ricordiamo che $\langle Y \rangle_t = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-2X_s^2}}{1+X_s^2}\,\mathrm{d}s$.

(d) Si spieghi perché il processo $M = \{M_t\}_{t\in[0,\infty)}$ definito da $M_t := Y_t^2 - \langle Y \rangle_t$ è una martingala. Si deduca che per ogni tempo d'arresto τ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\mathrm{E}(Y_{\tau\wedge t}^2) - \mathrm{E}(\langle Y \rangle_{\tau\wedge t}) = \frac{\pi}{4}.$$

Consideriamo infine il tempo d'arresto $\tau := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq a\}$, dove $a > 0$ è un numero fissato.

(e) (*) Si giustifichino le seguenti disuguaglianze, valide per ogni $t \geq 0$:

$$Y_{\tau\wedge t}^2 \leq \pi, \qquad \langle Y \rangle_{\tau\wedge t} \geq \frac{e^{-2a^2}}{1+a^2}\,(\tau\wedge t).$$

Si deduca che $\mathrm{E}(\tau\wedge t) \leq e^{2a^2}(1+a^2)\frac{3\pi}{4}$, per ogni $t \geq 0$, e si concluda che $\mathrm{E}(\tau) < \infty$.

Soluzione 1. (a) Per l'invarianza di scala del moto browniano

$$\mathrm{P}(C_{n,s}) \;=\; \mathrm{P}\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{s}} \le n\sqrt{s}\right) \;=\; \mathrm{P}\left(|B_1| \le n\sqrt{s}\right) .$$

Quindi, per n fissato, $\lim_{s\downarrow 0} \mathrm{P}\left(|B_1| \le n\sqrt{s}\right) = \mathrm{P}(B_1 = 0) = 0$, per la continuità dall'alto della probabilità. Dato che $\mathrm{P}\left(|B_1| \le n\sqrt{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n\sqrt{s}}^{n\sqrt{s}} e^{-x^2/2}$ e la funzione $x \mapsto e^{-x^2/2}$ è continua in $x = 0$, per il teorema fondamentale del calcolo si ha che per $s \downarrow 0$

$$\frac{\mathrm{P}(C_{n,s})}{2n\sqrt{s}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2n\sqrt{s}}\int_{-n\sqrt{s}}^{n\sqrt{s}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right) \;\longrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\big|_{x=0} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

(b) Se $\omega \in D_{n,t}$, per definizione si ha $|B_u(\omega)| \le nu$ per ogni $u \in [0,t]$. In particolare, per $s \le t$ si ha $|B_s(\omega)| \le ns$, quindi $\omega \in C_{n,s}$. Questo mostra che $D_{n,t} \subseteq C_{n,s}$.

(c) Per il punto (b) si ha $D_{n,t} \subseteq C_{n,s}$ e dunque $\mathrm{P}(D_{n,t}) \le \mathrm{P}(C_{n,s})$, per ogni $0 < s \le t$. Quindi $\mathrm{P}(D_{n,t}) \le \lim_{s\downarrow 0} \mathrm{P}(C_{n,s}) = 0$, per il punto (a). Dato che chiaramente $\mathrm{P}(D_{n,t}) \ge 0$, segue che $\mathrm{P}(D_{n,t}) = 0$.

(d) Prendiamo $\omega \in \Omega$ tale che la funzione $t \mapsto B_t(\omega)$ sia derivabile in zero, con derivata prima c, cioè $B_t(\omega)/t \to c$ per $t \downarrow 0$. Per definizione di limite, esiste $t_0 = t_0(\omega)$ tale che $|B_t(\omega)/t| \le 2c$ per ogni $0 < t \le t_0$. Scegliendo $k \ge 1/t_0$ e $n \ge 2c$, si ha dunque che $\omega \in D_{n,k}$, e l'inclusione è verificata.

(e) Usando la subattitività della probabilità e i due punti precedenti si ottiene

$$\mathrm{P}(A) \;\le\; \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(D_{n,\,1/k}) \;=\; 0 .$$

Soluzione 2. (a) Le funzioni $\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e $b(x) := \frac{x}{1+x^2}$ hanno derivata limitata sull'intera retta reale: infatti $\sigma'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$ e $b'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ sono funzioni continue che tendono a 0 per $x \to \pm\infty$, quindi sono limitate. Di conseguenza σ e b sono funzioni lipschitziane e hanno crescita al più lineare all'infinito, grazie al teorema di Lagrange. Sono dunque soddisfatte le ipotesi standard del teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali stocastiche visto a lezione: di conseguenza, per ogni $T > 0$, per l'equazione (0.1) con insieme dei tempi ristretto a $t \in [0,T]$ c'è esistenza di soluzioni forti e unicità per traiettorie.

(b) Y è un processo di Itô perché è funzione C^2 (in effetti C^∞, anzi analitica) del processo di Itô X. Chiaramente $Y_0 = \varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Dato che $\varphi'(x) = e^{-x^2}$,

$\varphi''(x) = -2xe^{-x^2}$ e $\mathrm{d}\langle X\rangle_t = \frac{1}{1+X_t^2}\,\mathrm{d}t$, applicando la formula di Itô si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t \;&=\; \varphi'(X_t)\,\mathrm{d}X_t \,+\, \frac{1}{2}\varphi''(X_t)\,\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\
&=\; e^{-X_t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t \,+\, \frac{X_t}{1+X_t^2}\,\mathrm{d}t\right) \,-\, X_t\,e^{-X_t^2}\,\frac{1}{1+X_t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t\,.
\end{aligned}$$

(c) Il processo Y è una martingala locale perché è un integrale stocastico. Per mostrare che è una martingale di quadrato integrabile, basta mostrare che il processo integrando è in $\mathcal{M}^2$ e non solo in $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$. Ma questo è immediato perché tale processo è limitato: infatti

$$\left|\frac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\right| \;\le\; 1\,, \quad \forall t\ge 0\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}\left(\int_0^T \frac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}t\right) \;\le\; T<\infty\,, \quad \forall T>0\,.$$

(d) Abbiamo mostrato a lezione che $Y_t^2 - \langle Y\rangle_t$ è una martingala, per qualunque integrale stocastico $Y_t = \int_0^t \varphi_s\,\mathrm{d}B_s$ con integrando $\{\varphi_s\}_{s\ge 0} \in \mathcal{M}^2$. In alternativa, applicando la formula di Itô si ottiene

$$\mathrm{d}M_t \;=\; 2Y_t\,\mathrm{d}Y_t \,+\, \mathrm{d}\langle Y\rangle_t \,-\, \mathrm{d}\langle Y\rangle_t \;=\; 2\,\varphi(X_t)\,\frac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\,\mathrm{d}B_t\,,$$

che mostra che M è una martingala locale. Dato che il processo integrando

$$\left\{2\,\varphi(X_t)\,\frac{e^{-X_t^2}}{\sqrt{1+X_t^2}}\right\}_{t\ge 0}$$

è limitato (si osservi che la funzione φ è limitata) segue che M è una vera martingala (di quadrato integrabile).

Dato che $\tau\wedge t$ è un tempo d'arresto limitato e M è una martingala continua con $M_0 = Y_0^2 = \frac{\pi}{4}$, per il teorema d'arresto si ha $\mathrm{E}(M_0) = \mathrm{E}(M_{\tau\wedge t})$, ossia

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \mathrm{E}(Y_{\tau\wedge t}^2) \,-\, \mathrm{E}(\langle Y\rangle_{\tau\wedge t})\,.$$

(e) La prima disuguaglianza segue immediatamente dal fatto che la funzione φ è limitata: $\varphi(x) \le \varphi(+\infty) = \sqrt{\pi}$ e dunque $Y_s^2 = \varphi(X_s)^2 \le \pi$ per ogni $s\ge 0$, in particolare per $s = \tau\wedge t$. Per la seconda disuguaglianza, osserviamo che

$$\langle Y\rangle_{\tau\wedge t} \;=\; \int_0^{\tau\wedge t} \frac{e^{-2X_s^2}}{1+X_s^2}\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^t \frac{e^{-2X_s^2}}{1+X_s^2}\,1_{[0,\tau\wedge t]}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dato che per $s\le\tau$ si ha per definizione $|X_s|\le a$, l'integrando è minorato da $\frac{e^{-2a^2}}{1+a^2}$ e quindi

$$\langle Y\rangle_{\tau\wedge t} \;\ge\; \frac{e^{-2a^2}}{1+a^2}\int_0^t 1_{[0,\tau\wedge t]}(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \frac{e^{-2a^2}}{1+a^2}\,(\tau\wedge t)\,.$$

Combinando queste disuguaglianze con la relazione $\frac{\pi}{4} \;=\; \mathrm{E}(Y_{\tau\wedge t}^2) - \mathrm{E}(\langle Y\rangle_{\tau\wedge t})$ dimostrata al punto precedente, si ottiene

$$\mathrm{E}(\tau\wedge t) \;\le\; e^{2a^2}(1+a^2)\,\mathrm{E}(\langle Y\rangle_{\tau\wedge t}) \;=\; e^{2a^2}(1+a^2)\left(\mathrm{E}(Y_{\tau\wedge t}^2) \;-\; \frac{\pi}{4}\right) \;\le\; e^{2a^2}(1+a^2)\,\frac{3\pi}{4}\,.$$

Per il teorema di convergenza monotona, dato che $(\tau\wedge t)\uparrow\tau$ per $t\to\infty$, si ottiene infine

$$\mathrm{E}(\tau) \;=\; \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}(\tau\wedge t) \;\le\; e^{2a^2}(1+a^2)\,\frac{3\pi}{4} \;<\; \infty\,.$$