

Prova d'esame di Calcolo delle probabilità
18/12/2010

N. MATRICOLA

COGNOME e NOME.....

Vecchio ordinamento: esercizi 1,2,4 eccetto 4.f

Seconda prova parziale: esercizi 3,4

Appello completo: esercizi 1,2,3,4

Esercizio 1

Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).

- (a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.
- (b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.
- (c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.
- (d) Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. (Lancio sempre la stessa moneta.)

Esercizio 2

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $X \sim Unif(0, \log(3))$ e $Y \sim Unif(0, 1)$. Siano inoltre $S = \frac{Y+e^X}{2}$, $T = \frac{Y-e^X}{2}$ e $Z = \max(X, Y)$ tre ulteriori variabili aleatorie.

- (a) Calcolare $f_{(X,Y)}$ e $F_{(X,Y)}$.
- (b) Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T)
- (c) Calcolare la funzione di ripartizione di Z . (Può essere utile notare che $\log 3 > 1$.)
- (d) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.

Esercizio 3

Siano X_1, X_2, \dots, X_7 variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione assolutamente continua. Siano infine $Y = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, $Z = X_5$ e $W = \max\{X_6, X_7\}$

- (a) Quanto vale la probabilità $P(W < Z < Y)$.
- (b) Quanto vale la probabilità $P(W > Z)$.

Esercizio 4

Siano Y e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un insieme di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che Y abbia distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{6}$ e le X_n siano uniformi sull'intervallo $(0, 3)$. Siano infine $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $T_n = \min(Y, X_n)$ e $W_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n$.

- (a) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n .
- (b) Studiare la convergenza in probabilità e quasi certa di Z_n .
- (c) Calcolare F_{T_n} . Qual è il supporto di T_n ?
- (d) Quanto vale la probabilità $P(W_n \leq Z_n)$.
- (e) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di W_n .
- (f) Calcolare $\mathbb{E}[T_n]$. (Solo nuovo ordinamento.)