Prova d'esame di Calcolo delle probabilità 13/01/2011

N. MATRICOLA ....

COGNOME e NOME..

```
Vecchio ordinamento:  esercizi 1,2,4 eccetto 4.d
Nuovo ordinamento:  esercizi 1,2,3,4
```

Esercizio 1
Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).
I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$
I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$
Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.
(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?
(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?
(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.
(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?
(e) Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di 10 malfunzionanti?

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \alpha x(1-y) & x \in (0,1), \quad y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $Z = X + Y$
(a) Determinare α.
(b) Calcolare $P(X > Y)$.
(c) Calcolare $P(Z \leq 1)$
(d) Calcolare la funzione di ripartizione F_Z e la densità f_Z.
(e) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$

Esercizio 3

Siano X_1, X_2, X_3 variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione assolutamente continua di densità:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano infine $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ e $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(a) Calcolare la densità congiunta $f_{(S,T)}$.

(b) Scrivere l'enunciato della legge forte dei grandi numeri per variabili aleatorie indipendenti.

(c) Enunciare la proprietà "assenza di memoria" per variabili aleatorie esponenziali.

Esercizio 4

Siano $(X_n)_{n\geq 3}$ variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che le variabili aleatorie X_n siano assolutamente continue e abbiano densità:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{n-1}{x^n} & x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di distribuzione F_{X_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità di X_n.
(c) Studiare la convergenza quasi certa di X_n.
(d) Studiare la convergenza in media r-esima di X_n. (`Solo nuovo ordinamento`)