Prova d'esame
di Calcolo delle Probabilità
22/09/2011

N. MATRICOLA ....

COGNOME e NOME...

Esercizio 1

Un orologio a pendolo ogni giorno può aumentare o diminuire il suo ritardo con una legge Normale di media 0 e deviazione standard di 1 secondo. Consideriamo gli incrementi/ritardi dei singoli giorni indipendenti tra di loro. Supponiamo infine che oggi, 22 Settembre 2011, l'orologio indichi l'ora esatta (zero ritardo).

(a) Quanti secondi di ritardo avrà accumulato mediamente tra una settimana, e tra un anno (366 giorni). (Si! Stiamo supponendo che nessuno metta a posto l'orologio.)
(b) Qual è la probabilità che tra 3 giorni abbia un ritardo superiore a 3 secondi. Qual è la probabilità che tra 3 giorni abbia più di 3 secondi di anticipo?
(c) Qual è la probabilità che il 22 Ottobre abbia un ritardo superiore ai 30 secondi?
(d*) Qual è al probabilità che l'orologio a pendolo sia in ritardo sia domani che dopodomani? (*Sugg.*: `considerare la distribuzione congiunta.`)

Esercizio 2

Sia (X_1, X_2, X_3) un vettore aleatorio composto da tre variabili aleatorie indipendenti e con distribuzioni normali: $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,4)$ e $X_3 \sim N(0,9)$. Siano inoltre Y_1, Y_2 e Y_3 definite da:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + \frac{X_2}{2} \\ \\ Y_2 = \frac{X_2}{2} - X_1 \\ \\ Y_3 = \frac{X_3}{3} \end{cases}$$

(a) Scrivere la densità del vettore aleatorio (X_1, X_2, X_3).
(b) Si calcoli la densità del vettore aleatorio (Y_1, Y_2, Y_3).
(c) Le variabili aleatorie Y_1 e Y_2 sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(d) Qual è la distribuzione di Y_2?

Esercizio 3

Sia X una v.a. con funzione di ripartizione F_X data da:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{2} + \alpha t & -1 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$$

Dove α è un parametro.
(a) Per quali valori di α la funzione F_X è effettivamente una funzione di ripartizione?
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[X^2]$.
(d) Qual è il valore di α che minimizza $\mathbb{E}[X^2]$? Qual è la distribuzione di X se scegliamo per α proprio il valore che minimizza $\mathbb{E}[X^2]$? (Indicare qual è la distribuzione tra quelle viste a lezione!)

Esercizio 4

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che ciascuna X_n abbia distribuzione assolutamente continua con densità f_{X_n} data da:

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{n^2}{(n^2x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{X_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione ed in probabilità di $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Studiare la convergenza quasi certa di $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(d) Quanto vale $\mathbb{E}[X_n^2]$? Cosa si può dire della convergenza in media r-esima della successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $r = 2$? (*Sugg.*: `Per il calcolo di` $\mathbb{E}[X_n^2]$ `può essere utile considerare il limite:` $\lim_{x\to\infty} x^2 f_{X_n}(x)$.)