Prova d'esame
di Calcolo delle Probabilità
02/07/2011

N. MATRICOLA ....

COGNOME e NOME..

Esercizio 1

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna A) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna B) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0,1]$) di dare testa e una probabilità $1-p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna A se esce croce estraiamo una pallina dall'urna B.

(a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (`Il risultato dipende dal parametro` p.)

(b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?

(c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca[1]?

(d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?

(e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?

(f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Consideriamo i seguenti eventi:
$T =$"Il risultato del lancio della moneta è testa";
$A =$"La moneta viene estratta dall'urna A";
$B =$"La moneta viene estratta dall'urna B";
$R =$"La pallina estratta è Rossa";
$N =$"La pallina estratta è Nera";
$B_i =$"La pallina estratta è Bianca";
Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1-p$, $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

(a) $P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$
(b) $P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$
(c) $P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$
Utilizzando Bayes $P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$
(d) $\frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2}$
(e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall p \in [0,1]$
(f) $\frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$

[1] Invece di "la pallina estratta è rossa" (traccia originale)

Esercizio 2

Una società produce 100000 microprocessori. Sia p ($p \in (0,1)$) la probabilità che un microprocessore si guasti entro un anno di vita. Supponiamo tali probabilità indipendenti e indichiamo con X il numero di micropocessori che si guasteranno entro un anno.
(a) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e VAR$[X]$. (`Dipendono dal parametro` p)
(b) Stimare la probabilità che X sia minore di 100. (`Indicare con` Φ `la funzione di ripartizione della normale standard.`)
(c*) Per quali valori del parametro p si ha $P(X < 100) > 90\%$? (`Utilizzare` $\Phi(1.28) \simeq 0.90$`.`)

Sia $N = 100000$
(a) $X \sim Bin(N,p)$, $\mathbb{E}[X] = Np$, VAR$[X] = Np(1-p)$
(b) Sia $\mu = \mathbb{E}[X] = Np$ e sia $\sigma^2 =$VAR$[X] = Np(1-p)$

$$P(X < 100) = P(X \leq 99.5) \simeq \Phi\left(\frac{99.5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{99.5-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$$

(c) Poiché la funzione Φ è crescente si ha

$$\Phi\left(\frac{99.5-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) > 0.90 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{99.5-Np}{\sqrt{Np(1-p)}} > 1.28$$

La risoluzione di quest'ultima disuguaglianza permette di trovare i valori del parametro p che soddisfano la richiesta del problema $P(X < 100) > 90\%$.
Soluzione

$$0 \leq p \lesssim 0.000875$$

Esercizio 3

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \alpha e^{-(x^2+y^2+xy)}) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$$

Sia $S = X + Y$ e sia $T = X - Y$.
(a) Calcolare la densità congiunta del vettore (S, T).
(b) Calcolare la funzione di densità f_S. (`Può essere utile l'uguaglianza:` $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$`.`)
(c) Calcolare la funzione di densità f_T.
(d) Quanto vale α?
(e) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti?
(f) Quali sono le distribuzioni di S e T? (`Indicare solo i nome delle distribuzioni e i loro parametri.`)
(g) Qual è la distribuzione di X? (`Esprimere` X `in funzione di` S `e` T)

(a) Ricaviamo X e Y in funzione di S e T

$$\begin{array}{l} X = \frac{S+T}{2} \\ Y = \frac{S-T}{2} \end{array} \qquad \left|\det\begin{pmatrix} \frac{d}{dS}X & \frac{d}{dT}X \\ \frac{d}{dS}Y & \frac{d}{dT}Y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$f_{(S,T)}(s, t) = \frac{\alpha}{2} e^{-((\frac{S+T}{2})^2 + (\frac{S-T}{2})^2 + \frac{S+T}{2}\frac{S-T}{2})} = \frac{\alpha}{2} e^{-(\frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}t^2)} \qquad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

(b)

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s, t) dt = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{3}{4}s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt = \alpha\sqrt{\pi} e^{-\frac{3}{4}s^2}$$

(c)

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s, t) ds = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{1}{4}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2} ds = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

(d) Per la positività delle funzioni di densità deve essere $\alpha \geq 0$. Per calcolare il valore esatto di α è sufficiente porre l'integrale da meno infinito a più infinito di una funzione di densità uguale a uno.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) ds = \alpha\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2} ds = \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

(e) Le variabili X e Y sono indipendenti infatti sostituendo ad α il valore $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ si ottiene facilmente $f_{(S,T)}(s, t) = f_S(s) \cdot f_T(t)$ per ogni s e t.
(f) $S \sim N(0, \frac{2}{3})$, $T \sim N(0, 2)$
(g) Poiché $X = \frac{S+T}{2}$, S e T sono normali e indipendenti allora anche X è una distribuzione normale. $\mathrm{VAR}[X] = \frac{1}{4}(\mathrm{VAR}[S] + \mathrm{VAR}[T]) = \frac{2}{3}$ dunque $X \sim N(0, \frac{2}{3})$

Esercizio 4

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che ciascuna X_n abbia distribuzione bernoulliana di parametro $\frac{1}{n^\alpha}$, con $\alpha > 0$. Siano infine $S_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ e $W_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
(a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione. Per i valori di α in cui converge indicare il limite.
(b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità. Per i valori di α in cui converge (in probabilità) indicare il limite.
(c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente. Per i valori di α in cui converge (quasi certamente) indicare il limite.
(d) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in media r-esima. Per i valori di α in cui converge (in media r-esima) indicare il limite.
(e) Studiare la convergenza quasi certa di $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[S_n]$. (`Lasciare il risultato sotto forma di sommatoria`
(g*) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n]$.
(h) Studiare la convergenza in probabilità di $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (`Utilizzare il risultato del questito (g) e la disuguaglianza di Markov:`
`Per ogni` T `v.a. non negativa e per ogni` $x > 0$ `si ha` $P(T > x) \leq \frac{\mathbb{E}[T]}{x}$)

$$(a) \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n^\alpha} & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0 \quad \forall \alpha > 0$$

(b) Poiché converge in distribuzione ad una costante allora converge anche in probabilità. $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \quad \forall \alpha > 0$
(c) Utilizziamo il seguente Teorema: Se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti allora $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} C$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ si ha $\sum_n P(|X_n - C| > \epsilon) < \infty$.
Nel nostro caso $C = 0$. Dobbiamo stimare la serie $\sum_n P(|X_n| > \epsilon)$ se ϵ è maggiore di 1 allora la stima è banale. Consideriamo il caso $\epsilon \in (0, 1)$

$$\sum_n P(|X_n| > \epsilon) = \sum_n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} = \infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < \infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

dunque $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$ se e solo se $\alpha > 1$.
(d) Poiché X_n é uniformemente limitata e converge in probabilità allora converge anche in media r-esima $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.r} 0$ per ogni $\alpha > 0$. Un metodo alternativo può essere quello di applicare la definizione di convergenza in media r-esima.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^r] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

dunque converge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero per ongi $r \geq 1$ e per ogni $\alpha > 0$.
(e) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata e monotona dunque converge quasi

certamente ad una variabile W. $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} W$. Dove W è definita nel modo seguente: $W = \begin{cases} 1 & \text{Se } X_n = 1 \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{Se } X_n = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

In aggiunta alle richieste del testo è possibile osservare che $P(W = 0) = P(X_n = 0\ \forall n) = \prod_n (1 - \frac{1}{n^\alpha})$

$$P(W = 0) = 0 \qquad \iff \qquad \sum_n \frac{1}{n^\alpha} = \infty \qquad \iff \qquad \alpha \leq 1$$

Dunque per $\alpha \in (0, 1]$ si ha $P(W = 1) = 1$.

(f) $\mathbb{E}[S_n] = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha}$

Se $m < n$ allora

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m \frac{1}{i^\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^n \frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\frac{1}{(m+1)^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\frac{1}{(m+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+m)^\alpha}$$

Dunque per ogni m vale la disuguaglianza

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \frac{1}{(1+m)^\alpha}$$

da cui segue

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq 0$$

poiché infine $\mathbb{E}[S_n] \geq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] = 0$.

(h) Poiché $\mathbb{E}[S_n]$ tende a zero, un tentativo ragionevole è quello di provare a dimostrare che il limite in probabilità di S_n sia proprio lo zero. Applichiamo la definizione di convergenza in probaiblità, dobbiamo mostrare che il limite $\lim_{n\to\infty} P(S_n - 0 > \epsilon)$ è uguale a zero per ogni $\epsilon > 0$. Dalla disuguaglianza di Markov abbiamo $P(S_n > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n]}{\epsilon}$ dunque

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n - 0 > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \limsup_n \mathbb{E}[S_n] = 0$$

da cui si ottiene $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$

Un metodo alternativo per risolvere il quesito (h) può essere quello di calcolare prima la convergenza in media r-esima per $r = 1$. Infatti per $r = 1$ si ha $\lim_n \mathbb{E}[|S_n - 0|^r] = \lim_n \mathbb{E}[|S_n|] = 0$ dunque S_n converge in media r-esima con $r = 1$ e quindi converge anche in probabilità.

Un terzo metodo è quello di usare la legge dei grandi numeri per v.a. non correlate ed equilimitate in varianza. Dalla legge forte dei grandi numeri segue che:

$$S_n - \mathbb{E}[S_n] \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$$

da (g) sappiamo che $\mathbb{E}[S_n] \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$ e dunque $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$.

Esercizio 5

Per quali valori del parametro α la funzione f è una densità di probabilità di una variabile aleatoria.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+\alpha\cdot\cos(x)}{\pi} & x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{array} \right\}$$

SOLUZIONE

L'integrale di f è sempre uguale ad 1. Se imponiamo che la funzione non può essere negativa otteniamo $\alpha \in [-1, 1]$