

Esercitazione del 14/10/2011

Calcolo delle probabilità

Esercizio 1

Calcolo delle Probabilità 03/11/2009

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte 3 carte.

(a) Qual è la probabilità che vi sia almeno una carta inferiore (strettamente) a 3?

Soluzione: $1 - \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

Esercizio 2

Calcolo delle Probabilità 18/12/2010

Ci sono 10 monetine di cui 5 con due teste, 2 con due croci e 3 regolari (una moneta regolare ha una faccia testa e una faccia croce e la probabilità che esca testa è uguale a quella che esca croce).

(a) Se vengono lanciate tutte e dieci le monete, qual è la probabilità che ci siano più teste che croci.

(b) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che dia croce.

(c) Scelta una moneta a caso ed effettuato un lancio, qual è la probabilità che sia una moneta regolare sapendo che il risultato del lancio è croce.

(d) Scelgo una moneta a caso ed effettuo 100 lanci, stimare la probabilità che si realizzino più di 60 teste. (Lancio sempre la stessa moneta.)

Soluzione: (a) $\frac{7}{8}$, (b) $\frac{7}{20}$, (c) $\frac{3}{7}$, (d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}(1 - \Phi(2.1)) \simeq 0.50536$

Esercizio 3

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/07/2011

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Consideriamo due mazzi di carte. Il primo mazzo (A) è costituito da 6 carte con i numeri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mentre il secondo mazzo (B) è costituito da 8 carte con i numeri $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Scegliamo un mazzo a caso e estraiamo una carta a caso dal mazzo.

(a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 2?

(b) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 10?

(c) Qual è la probabilità che la carta estratta sia un 4?

(d) Qual è la probabilità che la carta estratta sia minore (stretto) di 5?

(e) Sapendo che la carta estratta è un 3, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A ?

(f) Sapendo che la carta estratta è minore (stretto) di 5, qual è la probabilità che sia stata estratta dal mazzo A ?

(g) Sia X_A il valore di una carta estratta a caso dal mazzo A . Quanto vale $\mathbb{E}[X_A]$?

(h) Sia X_B il valore di una carta estratta a caso dal mazzo B . Quanto vale $\mathbb{E}[X_B]$?

(i) Scegliamo un mazzo a caso ed estraiamo una carta a caso. Indichiamo con X il valore della carta. Quanto vale $\mathbb{E}[X]$?

Soluzione: (a) $\frac{1}{12}$, (b) $\frac{1}{16}$, (c) $\frac{7}{48}$, (d) $\frac{11}{24}$, (e) $\frac{4}{7}$, (f) $\frac{8}{11}$, (g) $\frac{7}{2}$, (h) $\frac{13}{2}$, (i) 5.

Esercizio 4

Istituzioni di Calcolo delle Probabilità 01/09/2011

Se possibile, indicare i risultati sotto forma di frazioni

Alessia e Daniele possiedono due dadi a sei facce. Il dado di Daniele è regolare mentre quello di Alessia è truccato. Indichiamo con A il risultato del lancio del dado di Alessia e con D il risultato del lancio del dado di Daniele. Supponiamo infine che il dado di Alessia abbia la seguente distribuzione: $P(A = 6) = 0.3$, $P(A = 5) = 0.2$, $P(A = 4) = 0.2$, $P(A = 3) = 0.1$, $P(A = 2) = 0.1$, $P(A = 1) = 0.1$.

(a) Calcolare $P(A > 3)$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[A]$.

(c) Calcolare $P(D > 3)$.

(d) Calcolare $P(A = 6, D = 6)$.

(e) Calcolare $P(A = 5, D = 4)$.

- (f) Calcolare $P(A > 3, D > 3)$.
- (g) Calcolare $P(A = 6|A > 3)$.
- (h) Calcolare $P(A = 6|D > 3)$.
- (i) Calcolare $P(A + D = 11)$.
- (l) Calcolare $P(A \cdot D > 20)$.
- (m) Calcolare $P(A > D)$.
- (n) Calcolare $P(A = 6|A > D)$.

Soluzione:

| | <i>A</i> | <i>L</i> | <i>E</i> | <i>S</i> | <i>S</i> | <i>I</i> | <i>A</i> |
|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <i>D</i> | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| <i>A</i> | 1 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |
| <i>N</i> | 2 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |
| <i>I</i> | 3 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |
| <i>E</i> | 4 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |
| <i>L</i> | 5 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |
| <i>E</i> | 6 | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{1}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{2}{60}$ | $\frac{3}{60}$ |

- (a) $\frac{7}{10}$, (b) $\frac{21}{5}$, (c) $\frac{1}{2}$, (d) $\frac{1}{20}$, (e) $\frac{1}{30}$, (f) $\frac{7}{20}$, (g) $\frac{3}{7}$, (h) $\frac{3}{10}$, (i) $\frac{1}{12}$, (l) $\frac{1}{4}$, (m) $\frac{8}{15}$,
 (n) $\frac{15}{32}$

Esercizio 5

Calcolo delle Probabilità 02/07/2011

Consideriamo due urne ed una moneta truccata. La prima urna (urna *A*) contiene 2 palline rosse e 4 bianche, la seconda urna (urna *B*) contiene una pallina rossa, una bianca e una nera. Mentre la moneta truccata ha una probabilità p ($p \in [0, 1]$) di dare testa e una probabilità $1 - p$ di dare croce. Lanciamo la moneta, se esce testa estraiamo una pallina dall'urna *A* se esce croce estraiamo una pallina dall'urna *B*.

- (a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera? (Il risultato dipende dal parametro p .)
 (b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa?
 (c) Qual è la probabilità che la moneta abbia dato testa sapendo che la pallina estratta è bianca?
 (d) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{1}{2}$?

- (e) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{1}{3}$?
 (f) Per quali valori di p la probabilità di estrarre una pallina nera è $\frac{1}{4}$?

Svolgimento:

Consideriamo i seguenti eventi:

T = “Il risultato del lancio della moneta è testa”;

A = “La moneta viene estratta dall’urna A”;

B = “La moneta viene estratta dall’urna B”;

R = “La pallina estratta è Rossa”;

N = “La pallina estratta è Nera”;

B_i = “La pallina estratta è Bianca”;

Le ipotesi della traccia diventano: $A = T$, $B = T^c$, $P(A) = p$, $P(B) = 1 - p$,
 $P(R|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B_i|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = 0$, $P(R|B) = \frac{1}{3}$, $P(B_i|B) = \frac{1}{3}$, $P(N|B) = \frac{1}{3}$.

(a) $P(N) = P(N|A) \cdot P(A) + P(N|B) \cdot P(B) = \frac{1-p}{3}$

(b) $P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$

(c) $P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A) + P(B_i|B) \cdot P(B) = \frac{1+p}{3}$

Utilizzando Bayes $P(T|B_i) = \frac{P(B_i|T) \cdot P(T)}{P(B_i|T) \cdot P(T) + P(B_i|T^c) \cdot P(T^c)} = \frac{2p}{p+1}$

(d) $\frac{1+p}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

(e) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \forall p \in [0, 1]$

(f) $\frac{1-p}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

Esercizio 6

Calcolo delle Probabilità 13/01/2011

Una società costruisce microprocessori. Un microprocessore può presentare 2 tipi di malfunzionamenti, (indipendenti e sovrapponibili).

I malfunzionamenti di tipo 1 hanno probabilità $p_1 = 4\%$

I malfunzionamenti di tipo 2 hanno probabilità $p_2 = 0.5\%$

Inoltre la società effettua un test sui processori prodotti in grado di individuare un malfunzionamento di tipo 1 con una probabilità del 95%.

(a) Qual è la probabilità che un microprocessore presenti entrambi i tipi di malfunzionamento?

(b) Qual è la probabilità che un microprocessore superi il test?

(c) Sapendo che un microprocessore ha superato il test, qual è la probabilità che non presenti malfunzionamenti.

(d) Su mille microprocessori che hanno superato il test qual è il numero medio di microprocessori malfunzionanti?

(e) Su mille microprocessori che hanno superato il test (stimare) qual è la probabilità che ce ne siano più di 10 malfunzionanti?

Soluzione: (a) $\frac{1}{5000}$, (b) 96.2%, (c) $\frac{96 \cdot 995}{100 \cdot 962} \simeq 0.99293$ (d) $\simeq 7.07$

(e) $\simeq 1 - \Phi(1.29) \simeq 9.85\%$