Esercitazione del 4/11/2011
Calcolo delle probabilità

Somma di variabili aleatorie indipendenti.
Caso discreto.
Siano X e Y due variabili aletaroie discrete indipendenti, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} P(T=t) &= P(X+Y=t) = P\left(\bigcup_{\substack{x,y \\ x+y=t}} \{X=x, Y=y\}) \right) \\ &= \sum_{\substack{x,y \\ x+y=t}} P(X=x, Y=y)) \end{aligned}$$

$$P(T=t) = \sum_x P(X=x, Y=t-x))$$

Caso assolutamente continuo.
Siano X e Y due variabili aletaroie assolutamente continue indipendenti con densità f_X e f_Y, sia $T := X + Y$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} F_T(t) = P(T \le t) &= P(X+Y \le t) = \\ &= \int_{x+y \le t} f_X(x) f_Y(y) dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(t-x) dx \end{aligned}$$

Dunque

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(t-y) dy$$

Esercizio 1. Caso misto.
Siano X e Y due variabili indipendenti, sia X assolutamente continua con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,1)$ e sia Y v.a. discreta con distribuzione uniforme su $\{0,1\}$. Sia infine $T := X + Y$
(a) Verificare che Y è una v.a. di bernoulli per un certo parametro p. Quanto vale p.
(b) Qualè la distribuzione di T. (`Indicare a quale distribuzione appartiene` T `e quali sono i parametri.`)

Soluzione: (a) $p = \frac{1}{2}$, (b) $T \sim Unif(0,2)$

Cambio di variabili.
Esercizio 2. `(02/07/2011)`
Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \alpha e^{-(x^2+y^2+xy))} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}$$

Sia $S = X+Y$ e sia $T = X-Y$.
(a) Calcolare la densità congiunta del vettore (S,T).
(b) Calcolare la funzione di densità f_S. (`Può essere utile l'uguaglianza:` $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.)
(c) Calcolare la funzione di densità f_T.
(d) Quanto vale α?
(e) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti?
(f) Quali sono le distribuzioni di S e T? (`Indicare solo i nome delle distribuzioni e i loro parametri.`)
(g) Qual è la distribuzione di X? (`Esprimere` X `in funzione di` S `e` T)

(a) Ricaviamo X e Y in funzione di S e T

$$\begin{array}{l} X = \frac{S+T}{2} \\ Y = \frac{S-T}{2} \end{array} \qquad \left|\det\begin{pmatrix} \frac{d}{dS}X & \frac{d}{dT}X \\ \frac{d}{dS}Y & \frac{d}{dT}Y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$f_{(S,T)}(s,t) = \frac{\alpha}{2}e^{-((\frac{S+T}{2})^2+(\frac{S-T}{2})^2+\frac{S+T}{2}\frac{S-T}{2})} = \frac{\alpha}{2}e^{-(\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{4}t^2)} \qquad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

(b)

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s,t)dt = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{3}{4}s^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}t^2}dt = \alpha\sqrt{\pi}e^{-\frac{3}{4}s^2}$$

(c)

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s,t)ds = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{1}{4}t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2}ds = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

(d) Per la positività delle funzioni di densità deve essere $\alpha \geq 0$. Per calcolare il valore esatto di α è sufficiente porre l'integrale da meno infinito a più infinito di una funzione di densità uguale a uno.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)ds = \alpha\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2}ds = \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

(e) Le variabili X e Y sono indipendenti infatti sostituendo ad α il valore $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ si ottiene facilmente $f_{(S,T)}(s,t) = f_S(s) \cdot f_T(t)$ per ogni s e t.
(f) $S \sim N(0, \frac{2}{3})$, $T \sim N(0,2)$
(g) Poiché $X = \frac{S+T}{2}$, S e T sono normali e indipendenti allora anche X è

una distribuzione normale. $\text{VAR}[X] = \frac{1}{4}(\text{VAR}[S] + \text{VAR}[T]) = \frac{2}{3}$ dunque $X \sim N(0, \frac{2}{3})$

Esercizio 3. `(18/11/2010)`
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Sia $f_{(X,Y)}$ la sua densità.

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \notin Q \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} & (x, y) \in Q \end{cases}$$

Dove $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |, 0 < x < 1, 2 < y < 3\}$. Siano infine $S = \sqrt{X}$ e $T = Y - X$.
(a) Calcolare la costante α.
(b) Qual é la distribuzione della variabile aleatoria Y? Appartiene ad un famiglia di distribuzioni nota?
(c) Qual é la distribuzione della variabile aleatoria X?
(d) Determinare il supporto del vettore aleatorio (S, T)
(e) Determinare la densità $f_{(S,T)}$ del vettore aleatorio (S, T).
(f) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? (Giustificare le risposte.)
(g)Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti? (Giustificare le risposte.)
(h) Le variabili aleatorie S e Y sono indipendenti? (Giustificare le risposte.)

Esercizio 4. `(18/12/2010)`
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $X \sim Unif(0, \log(3))$ e $Y \sim Unif(0, 1)$. Siano inoltre $S = \frac{Y+e^X}{2}$, $T = \frac{Y-e^X}{2}$ e $Z = max(X, Y)$ tre ulteriori variabili aleatorie.
(a) Calcolare $f_{(X,Y)}$ e $F_{(X,Y)}$.
(b) Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T)
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di Z. `(Può essere utile notare che` $\log 3 > 1$`.)`
(d) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.

Esercizio 5. `(22/09/2011)`
Sia (X_1, X_2, X_3) un vettore aleatorio composto da tre variabili aleatorie indipendenti e con distribuzioni normali: $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 4)$ e $X_3 \sim N(0, 9)$. Siano inoltre Y_1, Y_2 e Y_3 definite da:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + \frac{X_2}{2} \\ \\ Y_2 = \frac{X_2}{2} - X_1 \\ \\ Y_3 = \frac{X_3}{3} \end{cases}$$

(a) Scrivere la densità del vettore aleatorio (X_1, X_2, X_3).
(b) Si calcoli la densità del vettore aleatorio (Y_1, Y_2, Y_3).
(c) Le variabili aleatorie Y_1 e Y_2 sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(d) Qual è la distribuzione di Y_2?