

# Esercizi di Calcolo delle Probabilità.

David Barbato

## **A chi è rivolto questo eserciziario.**

Questa è una raccolta di esercizi tratti dai testi d'esame dei corsi di "Istituzioni di Probabilità" e "Calcolo delle probabilità" tenuti presso la Facoltà di Scienze Statistiche dell'Università degli Studi di Padova nel periodo 2007-2010. L'eserciziario è stato scritto ad uso degli studenti del corso di "Calcolo delle Probabilità" per la Laurea Magistrale in Scienze Statistiche. Il testo non vuole essere esaustivo e si concentra solo su alcuni degli aspetti del Calcolo delle Probabilità.

## **Organizzazione dei capitoli**

Gli esercizi sono stati suddivisi in quattro gruppi. Il primo gruppo comprende i problemi con ambientazione, in questo tipo di esercizi un ruolo principale lo svolge la capacità di formulare il giusto modello probabilistico in cui leggere il problema. Il secondo gruppo di esercizi comprende i problemi inerenti le distribuzioni discrete e continue, i concetti di indipendenza, condizionamento e valore medio. Il terzo gruppo di esercizi riguarda i vettori aleatori continui in dimensioni 2 o più. Il quarto gruppo infine raccoglie gli esercizi sulle successioni di variabili aleatorie e i vari tipi di convergenze.

## **Suggerimenti e commenti.**

Per eventuali commenti, suggerimenti, critiche e correzioni potete contattarmi all'indirizzo: <barbato@math.unipd.it>.

# Chapter 1

**Esercizio 1** *Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.*

- (a) *Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9?*
- (b) *Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9?*
- (c) *Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi abbia dato un risultato maggiore di 4?*
- (d) *Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dati sia maggiore di 9 sapendo che c'è almeno un dado con risultato maggiore di 4.*

**Esercizio 2** *È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:*

- (a) *Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?*
- (b) *Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?*
- (c) *Indichiamo con  $Z$  il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Qual è il valor medio di  $Z$ ?*
- (d) *Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica?*

**Esercizio 3** *Una mensa universitaria offre 5 diversi primi, 4 diversi secondi e 3 diverse bibite. Supponiamo che ciascuno studente scelga in maniera casuale e indipendente un primo, un secondo ed una bibita.*

- (a) *Scelti due studenti, qual è la probabilità che abbiano fatto la stessa ordinazione (stesso primo, stesso secondo e stessa bibita)?*
- (b) *In un tavolo di dieci persone, qual è la probabilità che ci siano almeno due persone che hanno fatto la stessa ordinazione?*

(c) Per festeggiare l'inizio dell'anno accademico viene offerto agli studenti un bicchiere di vino rosso o bianco a scelta. Da una statistica risulta che tra coloro che hanno scelto un secondo di carne il 70% sceglie il vino rosso e il 30% il vino bianco, viceversa tra coloro che hanno scelto il secondo di pesce il 70% sceglie il vino bianco e il 30% sceglie quello rosso. Sapendo che ci sono tre secondi di carne e uno di pesce e supponendo che ciascuno studente sceglie il proprio secondo in maniera casuale tra i 4 piatti possibili qual è la probabilità che uno studente che beve vino rosso abbia scelto il secondo di carne?

**Esercizio 4** Una nota concessionaria automobilistica vende 3 diversi modelli di autovetture, disponibili in 5 colori e 3 possibili cilindrata (1900 cc, 2000 cc e 2200 cc). Supponendo che ciascuna combinazione di modello, colore e cilindrata abbia la stessa probabilità di essere scelta da un cliente, calcolare:

- (a) quante sono le possibili combinazioni di modello, colore e cilindrata?
- (b) qual è la probabilità che due diversi clienti abbiano ordinato la stessa autovettura (stesso modello, colore e cilindrata)?
- (c) Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, qual è la probabilità che siano state vendute almeno due autovetture uguali (stesso modello, colore e cilindrata)?

Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura di cilindrata massima (2200 cc) sceglie di avere il climatizzatore automatico, mentre questa percentuale scende al 45% per le auto di cilindrata inferiore (1900 cc e 2000 cc).

- (d) Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso di autovetture vendute dotate di climatizzatore automatico?
- (e) Qual è la probabilità che sia stata venduta un'autovettura con cilindrata massima sapendo che è dotata di climatizzatore automatico?

**Esercizio 5** Una nota società assicurativa ha  $N = 250000$  assicurati, di cui 150000 uomini e 100000 donne. Da una statistica risulta che la probabilità di un uomo di avere un incidente grave in un anno è del 3% mentre questa probabilità scende a 1.5% per le donne.

- (a) Calcolare la probabilità che una persona assicurata (scelta a caso) abbia un incidente grave nel prossimo anno?
- (b) Sapendo che una persona assicurata ha avuto un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un uomo?
- (c) Calcolare la media e la varianza del numero complessivo di assicurati che

*hanno un incidente grave in un anno?*

*La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 6200 allora la società andrà in perdita.*

*(d) Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 6200.*

**Esercizio 6** *Nel comune di Padova sono presenti 2500 lampioni, di cui 1000 nel centro storico e 1500 fuori dal centro storico. Ciascun lampione è provvisto di una lampadina che ha una probabilità  $p = \frac{1}{1000}$  di fulminarsi durante una notte. Supponiamo che tale probabilità sia indipendente dallo stato di usura della lampadina e inoltre che ogni mattina avvenga la sostituzione di tutte le lampadine che si sono fulminate durante la notte.*

*(a) Qual è la probabilità che durante la notte non si fulmini nessuna lampadina? (Scrivere la formula.)*

*(b) Sapendo che durante la notte si è fulminata una sola lampadina, qual è la probabilità che sia una lampadina del centro storico?*

*(c) Qual è il numero medio e la varianza del numero totale di lampadine fulminate in un anno (365 giorni)?*

*(d) La ditta che ha avuto l'appalto per la sostituzione delle lampadine nel 2009 ha acquistato 950 lampadine per le sostituzioni. Calcolare la probabilità che siano sufficienti. (Utilizzare l'approssimazione normale.)*

**Esercizio 7** *Un docente ha 70 studenti. Ogni volta che il docente fa ricevimento ciascuno studente può andarci o no, con probabilità  $p$  e  $1 - p$  rispettivamente. Supponiamo  $p = 0.01$  e assumiamo che ciascuno studente scelga di andare o no a ricevimento in maniera indipendente dagli altri.*

*(a) Indicare qual è la distribuzione del numero di studenti che si presentano ad ogni ricevimento e calcolarne la media.*

*(b) Qual è la probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno studente?*

*(c) Nel corso dell'anno vi sono 50 ricevimenti. Sia  $T$  il numero di ricevimenti in cui non si presenta nessuno. Calcolare il valore medio e la varianza di  $T$ .*

*(d) Stimare la probabilità che vi siano 30 o più ricevimenti in cui non si presenti nessuno. (Utilizzare l'approssimazione normale.)*

**Esercizio 8** La pizzeria “Da Gigi” vende pizze da asporto e bibite. Il numero di pizze vendute in un giorno di apertura è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda_1 = 40$ , mentre il numero di bibite vendute in un giorno si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro  $\lambda_2 = 0.5$ . Consideriamo inoltre il numero di bibite e pizze vendute in giorni diversi come variabili aleatorie indipendenti.

- (a) Calcolare la probabilità che in un giorno scelto a caso (tra quelli in cui la pizzeria è aperta) venga venduta una sola bibita.
- (b) In una settimana lavorativa di 6 giorni, qual è la probabilità che vengano vendute almeno 3 bibite?
- (c) Il prossimo anno la pizzeria “Da Gigi” rimarrà aperta 255 giorni, calcolare la media e la varianza del numero totale di pizze vendute in un anno.
- (d) Gigi, che è un pizzaiolo parsimonioso, ha deciso che per il prossimo anno metterà da parte 50 centesimi per ogni pizza venduta. Stimare la probabilità che in un anno (255 giorni lavorativi) Gigi riesca a mettere da parte più di 5000 euro.

**Esercizio 9** Nel gioco del superenalotto, giocando una sestina qualsiasi la probabilità di fare 3 è circa  $p_3 = 0.0031$ .

- (a) Se Alfredo gioca due sestine (la giocata minima) ogni concorso (ci sono due concorsi a settimana) per 6 anni, quante volte farà 3 in media?
- (b) Stimare la probabilità che in 6 anni non realizzi mai 3.
- (c) La probabilità di fare 6 è circa una su 623 milioni. Stimare, utilizzando l'approssimazione Poissoniana, la probabilità che Alfredo realizzi almeno un 6.
- (d) Supponiamo che in un concorso vengano giocate 5 milioni di sestine (indipendenti e scelte in maniera casuale). Calcolare la media e la varianza del numero di 3 realizzati.
- (e) Stimare la probabilità che giocando 6 milioni di sestine si realizzino più di 19000 tre. (Utilizzare l'approssimazione gaussiana.)

**Esercizio 10** Una società assicurativa ha assicurato 200.000 autovetture: 140.000 di grossa cilindrata e 60.000 di piccola cilindrata. Da una statistica interna condotta dalla società risulta che una macchina di grossa cilindrata ha una probabilità  $p_1 = \frac{1}{70}$  di avere un incidente grave entro un anno, mentre per le auto di piccola cilindrata questa probabilità è  $p_2 = \frac{1}{150}$ . Supponiamo infine che gli incidenti siano indipendenti tra di loro.

- (a) Qual è il valore medio e la varianza del numero totale di assicurati che

avranno un incidente grave il prossimo anno?

(b) Se un'autovettura assicurata ha un incidente grave qual è la probabilità che si tratti di un'auto di grossa cilindrata?

La società assicuratrice ha stimato che se il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno supera 2.500 allora la società andrà in perdita.

(c) Stimare (utilizzando l'approssimazione gaussiana) la probabilità che il numero di assicurati che hanno un incidente grave il prossimo anno superi 2.500.

(d) Supponendo che nei prossimi dieci anni il numero di assicurati rimanga costante e che anche le probabilità di avere incidenti rimangano costanti e siano ancora indipendenti.

Calcolare la media e la varianza del numero di incidenti complessivi provocati dagli assicurati nei prossimi 10 anni? Qual è la probabilità che tale numero superi 25.000.

**Esercizio 11** Un'azienda produce componenti per autovetture. Da una statistica risulta che lo 0.2% dei componenti presenta un difetto di livello 1 e lo 0.1% presenta un difetto di livello 2, mentre il restante 99.7% non presenta difetti. Sappiamo inoltre che durante la fase di rodaggio un componente con un difetto di livello 1 ha una probabilità di rompersi del 65% mentre questa stessa probabilità sale al 90% per i difetti di livello 2.

(a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso si rompa durante la fase di rodaggio?

(b) Se un componente si rompe durante la fase di rodaggio, qual è la probabilità che abbia un difetto di livello 1?

(c) L'azienda nel mese di Dicembre ha prodotto 60000 componenti. Qual è la media e la varianza del numero di questi componenti che si romperà durante la fase di rodaggio?

(d) Stimare la probabilità che durante il rodaggio (dei 60000 componenti) ci siano più di 150 rotture.

**Esercizio 12** In uno dei suoi celebri esperimenti, Mendel esaminò il colore di 580 piante di piselli. Supponiamo che ciascuna pianta di piselli abbia una probabilità  $p = \frac{1}{4}$  di avere i frutti gialli, e che tali probabilità siano indipendenti.

(a) Calcolare la media e la varianza del numero totale di piante di piselli gialle.

(b) Stimare, utilizzando l'approssimazione normale, la probabilità che il numero totale di piante dai frutti gialli sia (strettamente) compreso tra 120 e 180.

(c) Mendel osservò 152 piante dai frutti gialli. Calcolare la probabilità che il numero totale di piante dai piselli gialli sia 152. Dapprima utilizzare la distribuzione binomiale (scrivere solo la formula) e poi stimare tale probabilità utilizzando l'approssimazione normale.

(d) Supponendo che la probabilità di avere frutti gialli fosse stata invece  $p = \frac{1}{2}$  quale sarebbe stata la probabilità di osservare un numero di piante dai frutti gialli compreso tra 120 e 180?

**Esercizio 13** In un'agenzia di vendite porta a porta, lavorano 5 rivenditori, di cui 2 sono esperti e 3 sono neoassunti. Ogni dipendente visita 20 clienti al giorno. Un rivenditore esperto, ogni volta che visita un cliente ha una probabilità di vendita  $p_1 = \frac{1}{20}$ , mentre questa probabilità scende a  $p_2 = \frac{1}{40}$  per i neoassunti.

(a) Sia  $X$  il numero di vendite effettuate da un rivenditore esperto in un giorno, indicare la media, la varianza e la distribuzione di  $X$ .

(b) Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un giorno lavorativo? Qual è la media e la varianza del numero di vendite effettuate dai 5 rivenditori in un mese di 20 giorni lavorativi?

(c) Stimare qual è la probabilità che il numero totale di vendite nel mese di Marzo (20 giorni lavorativi) superi 80.

(d) Se oggi è stata effettuata una sola vendita qual è la probabilità che sia stata effettuata da un neoassunto.

**Esercizio 14** Vengono lanciati due dadi a 6 facce regolari. Calcolare le seguenti probabilità.

(a) Qual è la probabilità che siano entrambi pari?

(b) Qual è la probabilità che ci sia almeno un 5?

(c) Calcolare la probabilità che la somma sia 5.

(d) Calcolare la probabilità che la somma sia minore o uguale a 8.

(e) Calcolare la probabilità che siano entrambi minori di 6.

(f) Sapendo che la somma è uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

(g) Sapendo che la somma è minore o uguale a 7 calcolare la probabilità che ci sia almeno un 2.

**Esercizio 15** Viene lanciata 8 volte una moneta regolare. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che i primi due lanci siano testa?
- (b) Qual è la probabilità che il terzo lancio sia croce?
- (c) Qual è la probabilità che i primi 4 lanci siano testa?
- (d) Qual è la probabilità che nei primi 3 lanci ci sia almeno una testa e almeno una croce?
- (e) Qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci diano lo stesso esito?
- (f) Sapendo che i primi 3 lanci hanno dato testa, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (g) Sapendo che il terzo lancio ha dato croce, qual è la probabilità che tutti e 8 i lanci abbiano dato testa?
- (h) Qual è la probabilità che nei primi 5 lanci ci siano 2 teste e 3 croci (in qualsiasi ordine)?
- (i) Sapendo che tra i primi 2 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che tra i primi 2 lanci vi è almeno una croce?
- (l) Sapendo che nei primi 3 lanci vi è almeno una testa, qual è la probabilità che il primo lancio abbia dato testa?

**Esercizio 16** Viene lanciato un dado regolare (a 6 facce) e poi viene lanciata una moneta regolare tante volte quanto il risultato del lancio del dado. Calcolare le seguenti probabilità.

- (a) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata 3 volte (esattamente 3 volte)?
- (b) Qual è la probabilità che la moneta sia lanciata almeno 3 volte.
- (c) Qual è la probabilità che il primo lancio dia “testa”?
- (d) Qual è la probabilità che l’ultimo lancio dia “crocce”?
- (e) Se supponiamo di sapere che il risultato del dado sia “3”, qual è la probabilità che sia uscita “testa” 3 volte?
- (f) Qual è la probabilità che il dado abbia dato “3” e sia uscita “testa” 3 volte?
- (g) Se supponiamo di sapere che il dado ha dato “4”, qual è la probabilità che si sia uscita due volte “testa” e due volte “crocce”?
- (h) Qual è la probabilità che non si ottenga mai “testa”?
- (i) Qual è la probabilità che non si ottenga mai “testa”, sapendo che il dado ha dato un esito minore di 3?
- (l) Qual è la probabilità che il numero di “teste” sia maggiore del numero di “crocce”?

**Esercizio 17** *Un contadino si affida alla previsioni metereologiche secondo le quali vi è una probabilità dell' 70% che la prossima settimana piova. Lui sa che se concimerà il suo campo, allora ci saranno un 60% di piante che seccheranno in caso che non piova mentre tale probabilità scende al 10% in caso di pioggia. Se invece decide di non concimare il suo campo ci saranno un 30% di piante che seccheranno nel caso che non piova e un 20% in caso di pioggia.*

- (a) *Se decide di concimare il suo terreno, qual è la percentuale media di piantine che sopravviveranno?*
- (b) *Cosa gli conviene fare se vuole massimizzare il numero medio di piantine che non seccheranno?*

**Esercizio 18** *Nel 2008, in Veneto, sono stati celebrati 30000 matrimoni. Assumiamo che ciascun coniuge sia nato in un giorno a caso tra i 365 dell'anno (stiamo supponendo che nessuno sia nato il 29 febbraio). E supponiamo inoltre che tali eventi siano indipendenti.*

- (a) *Calcolare il numero medio di coppie in cui entrambi i coniugi sono nati il 25 dicembre.*
- (b) *Calcolare il numero medie di coppie che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.*
- (c) *Stimare la probabilità che il numero di coppie che festeggia il compleanno lo stesso giorno sia superiore a 100.*

**Esercizio 19** *Una macchina per il confezionamento del latte riempie i cartoni con una quantità di latte casuale, rappresentata da una v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Il valore di riempimento ideale sarebbe 1000 ml, ma vi è una certa tolleranza: una confezione è considerata accettabile se contiene tra 975 e 1025 ml di latte, e difettosa altrimenti.*

- (a) *Se  $\mu = 1000$  e  $\sigma = 10$ . Qual è la probabilità che una confezione sia difettosa.*
- (b) *Supponiamo ancora che  $\mu = 1000$ , per quali valori di  $\sigma$  la probabilità che una confezione sia difettosa è minore del 5%?*

**Esercizio 20** *Fiore e Fortunata giocano con una monetina (regolare). Fiore effettua 2 lanci e Fortunata effettua 3 lanci. Indichiamo con  $X_1$  e  $X_2$  il numero di croci realizzate da Fiore rispettivamente Fortunata.*

- (a) *Quali sono le distribuzioni di  $X_1$  e  $X_2$ ?*
- (b) *Quanto valgono  $\mathbb{E}[X_1]$ ,  $\mathbb{E}[X_2]$  e  $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2]$*

(c) Fortunata vince se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Qual è la probabilità che Fiore vinca la sfida?

(d) Sia  $n$  un intero maggiore di 0. Supponiamo ora che Fiore effettui  $n$  lanci (invece di 2) e Fortunata effettui  $n+1$  lanci (invece di 3). Fortunata vince la sfida se realizza più croci di Fiore, mentre Fiore vince se realizza un numero di croci maggiore o uguale a quello di Fortunata. Per quali valori di  $n$  la probabilità di vincere di Fortunata è maggiore di quella di Fiore? Per quali valori di  $n$  le due probabilità sono uguali?

**Esercizio 21** Ruggero e Lorenzo giocano a freccette. Supponiamo che per ogni lancio abbiano entrambi il 60% di probabilità di colpire il bersaglio: Ruggero ha il 20% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 20% di fare 25 punti; mentre Lorenzo ha il 10% di probabilità di fare 100 punti, il 20% di fare 50 punti e il 30% di fare 25 punti. Entrambi lanciano due freccette e poi sommano i punti. Indichiamo con  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X$  (risp.  $Y_1, Y_2, Y$ ) il risultato del primo, del secondo e della somma dei lanci effettuati da Ruggero (risp. Lorenzo).

- (a) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale zero punti?
- (b) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 75 punti?
- (c) Qual è la probabilità che Ruggero realizzi in totale 100 punti?
- (d) Quale è la distribuzione di  $X$ ? (Verificare che la somma delle probabilità sia effettivamente 1.)
- (e) Quale è la distribuzione di  $Y$ ?

## 1.1 Soluzioni

### Esercizio 1

Ci sono 6 esiti possibili per il primo dado e 6 esiti possibili per il secondo dado. Quindi per il principio fondamentale del calcolo combinatorio per la coppia di risultati dei due dadi ci sono  $6 \cdot 6 = 36$  esiti possibili. Infine l'ipotesi "dadi regolari" ci assicura che tutti e 36 gli esiti sono equiprobabili. Se consideriamo le somme abbiamo il seguente schema:

|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Per rispondere alle domande (a), (b), (c) e (d) è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

(a) Evidenziando in rosso i casi favorevoli si ricava:

|   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$P(\text{somma dei dadi uguale a } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(b)

|   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$P(\text{somma dei dadi maggiore di } 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c)

|   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$P(\text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di } 4) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

(d)

|   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|
|   |   |   |    | 6  | 7  |
|   |   |   |    | 7  | 8  |
|   |   |   |    | 8  | 9  |
|   |   |   |    | 9  | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

$$P(\text{Somma dei dadi maggiore di 9} | \text{Almeno uno dei due dadi è maggiore di 4}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

**Esercizio 2**

Siano  $X_1, \dots, X_{20}$  variabili aleatorie associate alle 20 donne con  $X_i = 1$  se la  $i$ -esima donna è daltonica e  $X_i = 0$  se la  $i$ -esima donna non è daltonica. Siano  $Y_1, \dots, Y_{10}$  variabili aleatorie con  $Y_i = 1$  se l' $i$ -esimo uomo è daltonico e  $Y_i = 0$  se l' $i$ -esimo uomo non è daltonico.

Le  $X_i$  e  $Y_i$  costituiscono una famiglia di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione bernoulliana, le  $X_i$  sono bernoulliane di parametro  $p_1 = 0.005$  mentre le  $Y_i$  sono bernoulliane di parametro  $p_2 = 0.07$

(a)

$$\begin{aligned} P(\text{"non ci sono persone daltoniche nel gruppo"}) &= \\ &= P(X_1 = 0, \dots, X_{20} = 0, Y_1 = 0, \dots, Y_{10} = 0) = \\ &= P(X_1 = 0) \cdot \dots \cdot P(X_{20} = 0) \cdot P(Y_1 = 0) \cdot \dots \cdot P(Y_{10} = 0) = \\ &= (1 - 0.005)^{20} \cdot (1 - 0.07)^{10} \simeq 0.4378 \end{aligned}$$

(b) Indichiamo con  $X$  e  $Y$  rispettivamente il numero totale di donne e uomini daltonici del gruppo, cioè  $X = X_1 + \dots + X_{20}$  e  $Y = Y_1 + \dots + Y_{10}$ . Le variabili  $X, Y$  quali somme di variabili aleatorie bernoulliane sono variabili aleatorie con distribuzione binomiale,  $X \sim \text{Bin}(0.005, 20)$  e  $Y \sim \text{Bin}(0.07, 10)$

La probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica è  $P(X = 0, Y = 1)$ .

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 1) &= P(X = 0) \cdot P(Y = 1) \\ P(X = 0) &= \binom{20}{0} \cdot (1 - 0.005)^{20} = 0.9046 \\ P(Y = 1) &= \binom{10}{1} \cdot (1 - 0.07)^9 \cdot 0.07^1 = 0.3643 \\ P(X = 0, Y = 1) &\simeq 0.33 \end{aligned}$$

(c)  $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 20 * 0.005 + 10 * 0.07 = 0.8$

(d) Denotiamo con  $F$  (risp.  $M$ ) l'evento la persona scelta a caso è una donna (risp. un uomo), denotiamo con  $D$  l'evento si tratta di una persona daltonica. Dalle ipotesi si ha:  $P(F) = \frac{2}{3}$ ,  $P(M) = \frac{1}{3}$ ,  $P(D|F) = 0.005$ ,  $P(D|M) = 0.07$ . Per calcolare  $P(M|D)$  utilizziamo la formula di Bayes.

$$P(M|D) = \frac{P(D|M) \cdot P(M)}{P(D|M) \cdot P(M) + P(D|F) \cdot P(F)} = \frac{0.07 \cdot \frac{1}{3}}{0.07 \cdot \frac{1}{3} + 0.005 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

### Esercizio 3

(a) Le combinazioni possibili di primo, secondo e bibita sono  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . Per la casualità e l'indipendenza delle scelte si ha che ciascuna delle possibili combinazioni di primo, secondo e bibita ha probabilità  $1/60$ . Indichiamo con i numeri da 1 a 60 le possibili ordinazioni e chiamiamo  $X_1$  e  $X_2$  le ordinazioni del primo e del secondo studente. Bisogna calcolare  $P(X_1 = X_2)$ .

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \dots + P(X_1 = 60, X_2 = 60)$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{3600} + \frac{1}{3600} + \dots + \frac{1}{3600}$$

$$P(X_1 = X_2) = \frac{1}{60}$$

Dunque la probabilità che due persone abbiano ordinato le stesse cose è  $1/60$ .

(b) Consideriamo l'evento  $A :=$  "ci sono almeno due persone con la stessa ordinazione" e l'evento  $B := A^c =$  "tutte e dieci le persone hanno fatto ordinazioni diverse". Allora si ha  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$ . Per calcolare  $\mathbb{P}(B)$  è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" =  $60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51$

"Casi possibili" =  $60^{10}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{60 \cdot 59 \cdot \dots \cdot 51}{60^{10}}$$

(c) Denotiamo con  $A_1$ ,  $A_2$  ed  $E$  gli eventi:

$A_1 :=$  "È stato scelto un secondo di carne"

$A_2 :=$  "È stato scelto un secondo di pesce"

$E :=$  "È stato scelto del vino rosso".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{3}{4} \quad P(A_2) = \frac{1}{4} \quad P(E|A_1) = 0.7 \quad P(E|A_2) = 0.3$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

**Esercizio 4** (a) Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha che le combinazioni possibili di modello, colore e cilindrata sono  $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ .

(b) Indicando con i numeri da 1 a 45 le 45 scelte possibili e denotando con  $X_1$  e  $X_2$  le autovetture scelte dal primo e secondo cliente, la probabilità cercata è  $P(X_1 = X_2)$ .

$$P(X_1 = X_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) + \dots + P(X_1 = 45, X_2 = 45)$$

$$P(X_1 = X_2) = \overbrace{\frac{1}{45 \cdot 45} + \frac{1}{45 \cdot 45} + \dots + \frac{1}{45 \cdot 45}}^{45 \text{ volte}} = \frac{1}{45}$$

(c) Consideriamo l'evento  $A :=$  "ci sono almeno due clienti che hanno comprato la stessa autovettura e l'evento  $B := A^c =$  "tutti e 6 i clienti hanno scelto autovetture diverse". Allora si ha  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B)$ . Per calcolare  $\mathbb{P}(B)$  è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

"Casi favorevoli" =  $45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40$

"Casi possibili" =  $45^6$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45 \cdot 44 \cdot \dots \cdot 40}{45^6} \cong 0.294 = 29.4\%$$

(d) Denotiamo con  $(Y_i)_{i \in \{1, 2, \dots, 100\}}$  le variabili aleatorie così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima autovettura ha il climatizzatore automatico.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$  denota il numero totale di autovetture con climatizzatore automatico vendute. Il valore atteso di autovetture vendute è dato da  $E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}] = E[Y_1] + E[Y_2] + \dots + E[Y_{100}]$

$$E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{1}{3} \cdot 0.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.45 = 0.5$$

dunque

$$E[Y] = E[Y_i] \cdot 100 = 0.5 \cdot 100 = 50$$

(e) Consideriamo gli eventi:

$A_1 :=$  "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 2200cc"

$A_2 :=$  "È stata scelta un'autovettura di cilindrata 1900cc oppure 2000 cc"

$E :=$  "È stato scelto il climatizzatore automatico".

Le ipotesi sono:

$$P(A_1) = \frac{1}{3} \quad P(A_2) = \frac{2}{3} \quad P(E|A_1) = 0.60 \quad P(E|A_2) = 0.45$$

La tesi è calcolare

$$P(A_1|E)$$

Dalla formula di Bayes

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

### Esercizio 5

Sia  $U$  l'evento l'assicurato è un uomo

$D$  l'evento l'assicurato è un donna

$I$  l'evento l'assicurato avrà un incidente nel prossimo anno.

Per ipotesi  $P(U) = 150000/250000 = 0.60 = 60\%$ ,

$P(D) = 100000/250000 = 0.40 = 40\%$ ,

$P(I|U) = 3\% = 0.03$  e  $P(I|D) = 1.5\% = 0.015$

$$(a) P(I) = P(I \cap U) + P(I \cap D) = P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D) = 0.03 \cdot 0.60 + 0.015 \cdot 0.40 = 0.024$$

(b) Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(U|I) = \frac{P(I|U) \cdot P(U)}{P(I|U) \cdot P(U) + P(I|D) \cdot P(D)} = \frac{0.018}{0.024} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(c) Siano  $(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$  e  $(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$  le seguenti variabili:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesima donna assicurata avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesima donna assicurata non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{l'iesimo uomo assicurato avrà un incidente il prossimo anno} \\ 0 & \text{l'iesimo uomo assicurato non avrà un incidente il prossimo anno} \end{cases}$$

$(X_i)_{i \in \{1,2,\dots,100000\}}$  famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.015

$(Y_i)_{i \in \{1,2,\dots,150000\}}$  famiglia di variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro 0.03

Il numero totale di incidenti del prossimo anno sarà

$$T = \sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i$$

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{150000}] =$$

$$= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_{100000}] + \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \dots + \mathbb{E}[Y_{150000}] =$$

$$= \underbrace{0.015 + 0.015 + \dots + 0.015}_{100000 \text{ volte}} + \underbrace{0.03 + 0.03 + \dots + 0.03}_{150000 \text{ volte}} =$$

$$= 100000 \cdot 0.015 + 150000 \cdot 0.03 = 6000$$

$$\text{VAR}[T] = \text{VAR}\left[\sum_{i=1}^{100000} X_i + \sum_{i=1}^{150000} Y_i\right] =$$

$$= \text{VAR}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{150000}] =$$

$$= \text{VAR}[X_1] + \text{VAR}[X_2] + \dots + \text{VAR}[X_{100000}] + \text{VAR}[Y_1] + \text{VAR}[Y_2] + \dots + \text{VAR}[Y_{150000}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \overbrace{0.015 \cdot (1 - 0.015) + 0.015 \cdot (1 - 0.015) + \cdots + 0.015 \cdot (1 - 0.015)}^{100000 \text{ volte}} + \\
&\quad + \overbrace{0.03 \cdot (1 - 0.03) + 0.03 \cdot (1 - 0.03) + \cdots + 0.03 \cdot (1 - 0.03)}^{150000 \text{ volte}} = \\
&= 100000 \cdot 0.015 \cdot (1 - 0.015) + 150000 \cdot 0.03 \cdot (1 - 0.03) = 5842.5
\end{aligned}$$

Un altro approccio possibile per la risoluzione del punto (c) poteva essere quello di considerare le variabili aleatorie  $X$  e  $Y$ ,  $X := \sum_{i=1}^{100000} X_i$  e  $Y := \sum_{i=1}^{150000} Y_i$ .  $X$  e  $Y$  sono variabili aleatorie binomiali indipendenti, la  $X$  di parametri 100000 e 0.015 e la  $Y$  di parametri 150000 e 0.03. Dunque  $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$  e  $\text{VAR}[T] = \text{VAR}[X] + \text{VAR}[Y]$ .

(d) Sia  $\mu = \mathbb{E}[T] = 6000$  e sia  $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[T]} = 76.436$ . Approssimare  $T$  con una variabile aleatoria gaussiana vuol dire scegliere una variabile aleatoria gaussiana  $W$  con la stessa media e varianza di  $T$  cioè  $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(6000, 5842.5)$ . Utilizzando l'approssimazione di continuità la probabilità cercata diventa:

$$P(T > 6200) \approx P(W > 6200.5)$$

per ricondursi ad una normale standard si utilizza l'approccio usuale di sottrarre la media e dividere per la deviazione standard.

$$P(W > 6200.5) = P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} > \frac{6200.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Sia  $Z := \frac{W - \mu}{\sigma}$ ,  $Z$  è una normale standard e svolgendo i calcoli a destra risulta:

$$P(W > 6200.5) = P(Z > 2.623)$$

Dunque

$$P(W > 6200.5) = 1 - \phi(2.623) = 0.0044 = 0.44\%$$

### Esercizio 6

(a) Vi sono in totale  $n = 2500$  lampadine e ciascuna ha una probabilità  $p = \frac{1}{1000}$  di fulminarsi. Denotiamo con  $X$  il numero totale di lampadine fulminate nella notte.  $X$  ha una distribuzione Binomiale di parametri  $n = 2500$  e  $p = \frac{1}{1000}$  dunque

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} (1 - p)^n p^0 = (0.999)^{2500} \simeq 0.082$$

Una altra possibile risoluzione del quesito (a). La probabilità di una lampadina di non fulminarsi è  $1 - p = 0.999$  dunque per l'indipendenza la probabilità per 2500 lampadine di non fulminarsi durante la notte è:

$$\overbrace{0.999 \cdot 0.999 \cdot \dots \cdot 0.999}^{2500 \text{ volte}} = 0.999^{2500} \simeq 0.082$$

(b) Tutte le lampadine hanno uguale probabilità di fulminarsi, nel centro storico vi sono 1000 lampadine su un totale di 2500. Possiamo calcolare la probabilità cercata come rapporto tra casi FAVOREVOLI e casi POSSIBILI.

$$P(\text{La lampadina fulminata è nel centro storico}) = \frac{1000}{2500} = 0.4 = 40\%$$

(c) Indichiamo con  $Y$  il numero di lampadine fulminate in un anno. Sia  $X_{i,j}$  con  $i \in \{1, 2, \dots, 2500\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, 365\}$  una variabile bernoulliana con:

$$X_{i,j} =$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Se la } i\text{-esima lampadina il giorno } j\text{-esimo si è fulminata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $Y = \sum_{i,j} X_{i,j}$ ,  $Y$  è somma di  $2500 \cdot 365$  variabili bernoulliane di parametro  $p = \frac{1}{1000}$ . Dunque  $Y$  è una variabile aleatoria binomiale di parametri  $p = \frac{1}{1000}$  e  $N = 2500 \cdot 365 = 912500$ .

$$\mathbb{E}[Y] = Np = 912.5$$

$$\text{VAR}[Y] = Np(1 - p) \simeq 911.59$$

(d) Approssiamo  $Y$  con una variabile aleatoria normale  $W$  con media e varianza uguali a media e varianza di  $Y$ .

$$W \sim \mathcal{N}(912.5, 911.6)$$

applicando la correzione di continuità si ha

$$P(Y \leq 950) \simeq P(W < 950.5) = P\left(\frac{W - 912.5}{30.19} < \frac{950.5 - 912.5}{30.19}\right)$$

Sia  $Z = \frac{W - 912.5}{30.19}$  dunque  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

$$P(W < 950.5) = P(Z < 1.26) = \Phi(1.26) = 0.89617$$

**Esercizio 7**

(a) Sia  $n = 70$  il numero degli studenti e sia  $p = 0.01$  la probabilità che uno studente vada a ricevimento un certo giorno. Fissato un giorno di ricevimento, sia  $X$  la variabile aleatoria che indica il numero totale di studenti presenti al ricevimento. Siano  $Y_1, \dots, Y_{70}$  le variabili aleatorie a valori in  $\{0, 1\}$  così definite:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Se l}'i\text{-esimo studente è andato a ricevimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora  $Y_i$  sono 70 v.a. indipendenti Bernoulliane di parametro  $p = 0.01$  e  $X = \sum_{i=1}^{70} Y_i$  ha distribuzione binomiale  $X \sim \text{Bin}(n = 70, p = 0.01)$  e la sua media è data da  $\mathbb{E}[X] = np = 0.7$ .

(b) La probabilità cercata è

$$P(X = 0) = \binom{70}{0} \cdot p \cdot (1 - p)^{70} = (0.99)^{70} \simeq 0.4948$$

Se avessimo deciso di stimare  $P(X = 0)$  approssimando la  $X$  con una v.a.  $Y$  di Poisson avremmo avuto  $Y \sim \text{Poisson}(0.7)$  e

$$P(Y = 0) = e^{-0.7} \cdot \frac{0.7^0}{0!} \simeq 0.4965.$$

(c) La probabilità che ad un fissato ricevimento non si presenti nessuno è  $p_2 = 0.4948$  (calcolata nel punto (b)). Poiché vi sono in tutto 50 ricevimenti allora la v.a.  $T$  ha distribuzione binomiale  $T \sim \text{Bin}(50, 0.4948)$ .

$$\mathbb{E}[T] = 50 \cdot p_2 \simeq 24.74$$

$$\text{Var}[T] = 50 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2) \simeq 12.50$$

(d) Sia  $\mu = E[T]$  e sia  $\sigma^2 = \text{Var}[T]$ . Sia  $W$  una variabile aleatoria normale di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Utilizzando la correzione di continuità possiamo stimare la probabilità cercata  $P(T \geq 30)$  con  $P(W > 29.5)$ .

$$\begin{aligned} P(W > 29.5) &= 1 - P(W < 29.5) = 1 - P\left(\frac{W - \mu}{\sigma} < \frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{29.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \Phi(1.35) \simeq 0.09 \end{aligned}$$

**Esercizio 8**

(a) Indichiamo con  $X$  il numero di bibite vendute,  $X$  è una variabile di Poisson di parametro 0.5 dunque ha distribuzione:

$$P(X = k) = \frac{0.5^k}{k!} e^{-0.5} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque per  $k = 1$  si ha:

$$P(X = 1) = \frac{0.5}{1} e^{-0.5} \simeq 0.303$$

(b) Siano  $X_1, X_2, \dots, X_6$  le variabili aleatorie che indicano le bibite vendute nei sei giorni lavorativi della settimana, sia  $X_s := X_1 + X_2 + \dots + X_6$  il numero di bibite vendute in una settimana di sei giorni lavorativi. Poiché  $X_s$  è somma di variabili di Poisson indipendenti allora anche  $X_s$  sarà di Poisson e la sua media sarà la somma delle medie cioè  $X_s \sim \text{Poisson}(3)$ . Dove  $3 = 6 \cdot 0.5$ .

$$\begin{aligned} P(X_s \geq 3) &= 1 - P(X_s < 3) = 1 - (P(X_s = 0) + P(X_s = 1) + P(X_s = 2)) = \\ &= 1 - \left( \frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} \right) = 1 - \frac{17}{2} e^{-3} \simeq 0.5768 = 57.68\% \end{aligned}$$

(c) Denotiamo con  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{255}$  il numero di bibite vendute nei 255 giorni di apertura della pizzeria e sia  $Y := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{255}$  il numero di pizze vendute in un anno.

Metodo di risoluzione 1:  $\mathbb{E}[Y_i] = 40$ ,  $VAR[Y_i] = 40$  e dunque per l'indipendenza delle  $Y_i$  si ha  $\mathbb{E}[Y] = 255 \cdot 40 = 10200$  e  $VAR[Y] = 255 \cdot VAR[Y_i] = 10200$ .

Metodo di risoluzione 2: poiché  $Y$  è somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti si ha  $Y \sim \text{Poisson}(260 \cdot 40 = 10200)$  e dunque  $\mathbb{E}[Y] = 10200$  e  $VAR[Y] = 10200$ .

(d) Denotiamo ancora con  $Y$  le pizze vendute in un anno di 255 giorni lavorativi e con  $Z := Y \cdot 0.50$  i soldi in euro messi da parte. Il problema si riduce a stimare la probabilità che  $Y > 10000$  oppure che  $Z > 5000$ . Dal punto (c) sappiamo che  $\mathbb{E}[Y] = 10200$  e  $VAR[Y] = 10200$ .

Metodo 1: Per stimare  $P(Y > 10000)$  possiamo approssimare  $Y$  con una variabile aleatoria gaussiana  $T$  di media  $\mu = 10200$  e varianza  $\sigma^2 = 10200$ . Allora utilizzando la correzione di continuità si ha:

$$P(Y > 10000) \simeq P(T > 10000.5) = 1 - P(T \leq 10000.5) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{10000.5 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\%$$

Metodo 2: Supponiamo invece di voler stimare  $P(Z > 5000)$ , allora prima di tutto dobbiamo calcolare speranza e varianza di  $Z$ . Poiché  $Z = Y \cdot 0.5$  si ha  $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] \cdot 0.5 = 5100$  e

$$\text{VAR}[Z] = \text{VAR}[Y] \cdot (0.5)^2 = 2550.$$

(La variabile aleatoria  $Z$  non è di Poisson!). La variabile aleatoria  $Z$  non è a valori interi quindi non è possibile applicare la correzione di continuità. Senza usare la correzione di continuità si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} P(Z > 5000) &\simeq P(S > 5000) = 1 - P(S \leq 5000) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{5000 - 5100}{\sqrt{2550}}\right) \simeq 1 - \phi(-1.98) = \phi(1.98) \simeq 97.6\% \end{aligned}$$

#### **Esercizio 9**

- (a) 3.9
- (b) 2%
- (c) circa  $2 \cdot 10^{-6}$  ovvero  $\frac{1}{500000}$
- (d) 15500, 15452
- (e) 0.0016

#### **Esercizio 10**

- (a) 2400, 2368.76
- (b)  $\frac{5}{6}$
- (c)  $1 - \phi(2.06) = 0.0197$
- (d) 24000, 23687.6,  $1 - \phi(6.5) \simeq 0$

#### **Esercizio 11**

- (a) 0.22%
- (b)  $\frac{13}{22}$
- (c) 132, 131.7
- (d)  $1 - \phi(1.61) = 0.0537$

**Esercizio 12**

(a) 145, 108.75

(b)  $\phi(3.31) - \phi(-2.35) = 0.99014$

(c)  $\binom{580}{152} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{152} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{428}$ ,  $\phi(0.72) - \phi(0.62) = 0.03187$

(d)  $\phi(-9.18) - \phi(-14.08) \simeq 0$

**Esercizio 13**

(a) 1,  $\frac{19}{20}$ ,  $\text{Bin}(20, \frac{1}{20})$

(b) 3.5  $\frac{269}{80}$ , 70,  $\frac{269}{4}$

(c)  $1 - \phi(1.28) = 0.10027$

(d)  $\frac{19}{45}$