# Primo appello prova scritta di
# **Calcolo delle probabilità**
# Laurea Triennale in Matematica
# 01/02/2016

**COGNOME e NOME** ............................................

**N. MATRICOLA**.....................................................

**Esercizio 1**. (9 punti)
Sia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una passeggiata aleatoria standard (cioè $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ con $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. e $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = \frac{1}{2}$). Sia $Y$ una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e siano assegnate per ogni $n$ le seguenti variabili aleatorie:

$$Z_n := \max\{|S_1|, \ldots, |S_n|\} \qquad\qquad W_n := min\{Z_n, Y\}$$

(a) Calcolare media e varianza di $S_n$.
(b) Cosa ci dice la legge dei grandi numeri se la applichiamo a $S_n = X_1 + \ldots + X_n$?
(c) Cosa ci dice l teorema del limite centrale se lo applichiamo a $S_n = X_1 + \ldots + X_n$?
(d) Utilizzando i risultati dei quesiti precedenti dimostrare che per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale il seguente limite: $\lim_{n\to\infty} P(S_n > M) = \frac{1}{2}$.
(e) Cosa si può dire del limite: $\lim_{n\to\infty} Z_n$.
(f) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in $L^p$ della successione di variabili aleatorie $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(g) Indicare (se esiste) qual è il limite della successione $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Soluzione**
(a) $E[S_n] = 0$; $Var[S_n] = n$
(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(d) Innanzitutto poiché $P(S_n > M) + P(S_n \le M) = 1$ allora vale

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > M) = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P(S_n \le M) = \frac{1}{2}$$

Utilizzereo il risultato (1) del quesito (c) per cui ci sarà utile l'uguaglianza

$$P(S_n \le M) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

inoltre poiché $\frac{M}{\sqrt{n}}$ tende a zero sarà utile ricordare che $\Phi(0) = 1/2$ e la funzione $\Phi$ è continua. Consideriamo il caso $M > 0$, vogliamo stimare la probabilità precedente, sia $\epsilon > 0$, per $n$ grande ( $n > \left(\frac{M}{\epsilon}\right)^2$) si avrá $\frac{M}{\sqrt{n}} < \epsilon$ quindi possiamo stimare la probabilità (2) nel seguente modo

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le -\epsilon\right) \le P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le -\frac{M}{\sqrt{n}}\right) \le P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \le P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \epsilon\right)$$

passando al limite ed utilizzando (1) per il primo e l'ultimo termine si ottiene:

$$\Phi(-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le -\frac{M}{\sqrt{n}}\right) \le \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \le \Phi(\epsilon) \qquad \forall \epsilon > 0$$

quindi poiché la funzione $\Phi$ è continua in zero, $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ e per la (2) si ha

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \le -M) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \le M) = \frac{1}{2}$$

(e) Prima di tutto osserviamo che la successione $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona quindi sicuramente ammette limite (anche eventualemente infinito). Sia

$$Z := \lim_{n\to\infty} Z_n$$

sempre per la monotonia per ogni $M$ si ha

$$P(Z > M) \ge P(|S_n| > M) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

dal risultato del quesito (d) è facile ricavare che $\sup_n P(|S_n| > M) = 1$ dunque si ha

$$P(Z > M) \ge 1 \qquad \forall M \in \mathbb{R}$$

cioè $Z = +\infty$ quasi certamente ovvero

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty \qquad \text{q.c.} \tag{3}$$

(f)-(g) Sia $\omega$ tale che $\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = +\infty$ allora si avrà $\lim_{n\to\infty} W_n(\omega) = Y(\omega)$ quindi per la (3) si ha

$$\lim_{n\to\infty} W_n = Y \qquad \text{q.c.}$$

la convergenza quasi certa ci dà anche la convergenza in probabilità e in distribuzione. Per avere la convergenza in $L^p$ basta osservare che $W_n$ converge quasi certamente, è dominata da $Y$ e $Y$ è in $L^p$.

**Esercizio 2**. (12 punti)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due martingale rispetto ad una medesima filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Siano inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n := \min\{X_n, Y_n\} \qquad \tau := \inf\{n \in \mathbb{N} | Z_n \leq 0\}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere.
(a) Il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(d) La variabile aleatoria $\tau$ è un tempo d'arresto.

Per le affermazioni vere fornire una dimostrazione, per quelle false fornire un controesempio.

**Soluzione**
Consideriamo innanzitutto il seguente esempio

**Esempio 1.** *Siano $\Omega := \{a, b\}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(a) = P(b) = 1/2$; cosicché lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è uno spazio con due esiti equiprobabili. Definiamo le martingale $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo:*

$$X_1 = 0 \qquad X_n(a) = -1 \qquad X_n(b) = 1 \qquad \forall n \geq 2$$

$$Y_n = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

*$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono martingale rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ data da:*

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\} \qquad \mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \forall n \geq 2$$

*Posto $Z_n = min(X_n, Y_n)$ si ha:*

$$Z_1 = 0 \qquad Z_n(a) = -1 \qquad Z_n(b) = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

*quindi per $n = 1$ poiché la sigma algebra $\mathcal{F}_1$ è banale si ha:*

$$\mathbb{E}[Z_2|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[Z_2] = -\frac{1}{2} < Z_1 = 0$$

*mentre per $n > 1$, $Z_{n+1} = Z_n$ e si ha*

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n$$

*Dunque $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala ma non è né una martingala né una sottomartingala*

(a) - (b) dalle esempio 1 si ottiene che non sempre il minimo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala o una sottomartingala.
(c) Sempre l'esempio 1 lascia intuire che il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$possa essere una supermartingala.
Il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è adattato perché è il minimo di processi adattati.
Il processo $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $L^1$ perché vale la stima $|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n|$

Resta da mostrare che per ogni $n$ vale $E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq Z_n$.
Poiché $Z_{n+1} = \min\{X_{n+1}, Y_{n+1}\}$ allora vale $Z_{n+1} \leq X_{n+1}$ e $Z_{n+1} \leq Y_{n+1}$ quindi

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \qquad \text{q.c.}$$

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n \qquad \text{q.c.}$$

dunque

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq \min\{X_n, Y_n\} = Z_n \qquad \text{q.c.}$$

(d) $\tau$ è un tempo di arresto perché è l'istante di primo contatto di un processo adattato.

**Esercizio 3**. (6 punti)
Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione, sia $Y$ una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$, sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una supermartingala positiva rispetto ad $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e sia infine $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la martingala definita da $Y_n := E[Y|\mathcal{F}_n]$.

(a) Dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono Tight.
(b) Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{N}$ tale che posto $Z_k = X_{n_k} \cdot Y_{n_k}$ si abbia $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione. (`Può essere utile il teorema di Prokhorov`)

**Soluzione**
(a) Poiché una martingala positiva è anche una supermartingala positiva sarà sufficiente dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è Tight. Dalla definizione sappiamo che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è Tight se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $n$ vale $P(|X_n| > M) < \epsilon$. Poiché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala vale

$$\mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X_1] \qquad \forall n$$

utilizzando la disuguaglianza di Markov e la positività di $X_n$ si ha:

$$P(|X_n| > M) = P(X_n > M) < \frac{\mathbb{E}[X_n]}{M} \leq \frac{\mathbb{E}[X_1]}{M}$$

quindi posto $M_\epsilon = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\epsilon}$ si ha:

$$P(|X_n| > M_\epsilon) < \epsilon \qquad \forall n, \epsilon > 0$$

(b) Innanzitutto il prodotto di due successioni che convergono in distribuzione non è detto che converga in distribuzione, quindi utilizzare il teorema di Prokhorov direttamente sulle successioni $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non porta a nulla. Applicheremo invece il teorema di Prokhorov a $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il teorema ci dice che se $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è Tight allora possiamo estrarre una sottosuccessione che converge in distribuzione. Quindi possiamo concludere la dimostrazione mostrando che $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è Tight. Poiché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono Tight allora per ogni $\epsilon > 0$ esistono $M_\epsilon^{(X)}$ e $M_\epsilon^{(Y)}$ tali che

$$P(|X_n| > M_\epsilon^{(X)}) < \epsilon \qquad P(|Y_n| > M_\epsilon^{(Y)}) < \epsilon \qquad \forall n$$

inoltre poichè $\{Z_n > M_\epsilon^{(X)} M_\epsilon^{(Y)}\} \subseteq \{X_n > M_\epsilon^{(X)}\} \cup \{Y_n > M_\epsilon^{(Y)}\}$ si ha

$$P(Z_n > M_\epsilon^{(X)} M_\epsilon^{(Y)}) \leq P(X_n > M_\epsilon^{(X)}) + P(X_n > M_\epsilon^{(Y)})$$

quindi basterà prendere $M_\epsilon^{(Z)} = M_{\epsilon/2}^{(X)} M_{\epsilon/2}^{(Y)}$ per ottenre la tesi

**Esercizio 4**. (6 punti)
Sia $X$ una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}$, con densità data da:

$$P(X = n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

(a) Calcolare la funzione caratteristica di $X$.
(b) Calcolare la media e la varianza di $X$.

**Soluzione**
(a)

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{itn}\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \\
= \sum_{n\leq -1} e^{itn}\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} + \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} e^{itn}\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \\
= \frac{1}{3}\left(1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2e^{-it}}\right)^n + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2e^{it}}\right)^n\right) = \\
= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2e^{-it}-1} + \frac{1}{2e^{it}-1}\right)
\end{aligned}$$

semplificando in maniera diversa si poteva ottenere una delle seguenti scritture:

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2e^{-it}-1} + \frac{1}{2e^{it}-1}\right) = \frac{1}{5 - 2e^{-it} - 2e^{it}} = \frac{1}{5 - 4\cos(t)} \tag{4}$$

(b) Un modo per ottenere media e varianza di $X$ può essere quello di utilizzare le derivate della funzione caratteristica.

$$\Phi'_X(0) = i\mathbb{E}[X] \qquad \Phi''_X(0) = -\mathbb{E}[X^2]$$

Occorre calcolare le derivate di $\Phi_X(t)$, derivando per esempio il quarto termine dell'equazione (4) si ottiene la derivata prima

$$\Phi'_X(t) = -\frac{4\sin(t)}{(5 - 4\cos(t))^2}$$

da cui si ottiene $\Phi'_X(0) = 0$ e quindi $\mathbb{E}[X] = 0$. Derivando di nuovo si ottiene

$$\Phi''_X(t) = -\frac{4\cos(t)}{(5 - 4\cos(t))^2} + 2\frac{16\sin^2(t)}{(5 - 4\cos(t))^3}$$

da cui si ottiene $\Phi''_X(0) = -4$ e quindi $\mathbb{E}[X^2] = 4$ e $VAR(X) = 4$

**Soluzione alternativa**

Mostreremo ora un metodo alternativo in cui cercheremo di sfruttare la forte somiglianza tra la distribuzione di $X$ e la distribuzione di una v.a. geometrica di parametro $\frac{1}{2}$.

Consideriamo una v.a. $Y \sim Geo(1/2)$ cioè tale che $P(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ per ogni $n \geq 1$. Sia inoltre $Z$ una ulteriore v.a. indipendente da $Y$ con distribuzione

$$P(Z = -1) = P(Z = 0) = P(Z = +1) = \frac{1}{3}$$

allora posto $\widetilde{X} = Z \cdot Y$ si verifica facilmente che vale $P(\widetilde{X} = n) = P(X = n)$ per ogni $n$ in $\mathbb{Z}$ ovvero

$$\widetilde{X} \sim X$$

quindi possiamo ottenere la funzione caratteristica, la media e la varianza di $X$ calcolando le corrispettive funzioni e quantità di $\widetilde{X}$.

Per la media e la varianza il procedimento è standard

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \qquad Var(Z) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{E}[Z^2] = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}[Y] = 2 \qquad Var(Y) = 2 \qquad \mathbb{E}[Y^2] = 6$$

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}] = \mathbb{E}[Z] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\mathbb{E}[\widetilde{X^2}] = \mathbb{E}[Z^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] = 4$$

$$Var(\widetilde{X}) = \mathbb{E}[\widetilde{X^2}] - \mathbb{E}[\widetilde{X}]^2 = 4$$

Mentre per quanto riguarda la funzione caratteristica si ha

$$\Phi_{\widetilde{X}}(t) = \mathbb{E}[e^{it\widetilde{X}}] = \sum_{n,m} P(Y = n, Z = m)e^{itnm}$$

$$\Phi_{\widetilde{X}}(t) = \sum_{m} \sum_{n} P(Y = n)P(Z = m)e^{itnm}$$

$$\Phi_{\widetilde{X}}(t) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{-itn} + e^0 + e^{+itn}\right)$$

$$\Phi_{\widetilde{X}}(t) = \frac{1}{3}(\Phi_Y(-t) + \Phi_Y(0) + \Phi_Y(t))$$

poiché la funzione caratteristica di una geometrica di parametro $1/2$ è data da $\Phi_Y(t) = \frac{e^{it}}{2-e^{it}}$ sostituendo si ottiene un'ulteriore scrittura della (4)

$$\Phi_{\widetilde{X}}(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-it}}{2 - e^{-it}} + 1 + \frac{e^{it}}{2 - e^{it}}\right)$$