Secondo appello
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
15/02/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1. (V. 3 punti.)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e X variabili aleatorie a valori in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supponiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \qquad \text{quasi certamente}$$

siano inoltre definite le seguenti funzioni:

$$F_{X_n}(t) := P(X_n \le t) \qquad F_X(t) := P(X \le t) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}$$

dimostrare che per ogni $t \in \mathbb{R}$ punto di continuità per F_X vale

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

Soluzione. Sappiamo che l'enunciato dell'esercizio è vero per variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}$ (piuttosto che in $\overline{\mathbb{R}}$) poiché la convergenza quasi certa implica quella in distribuzione. Un possibile metodo per risolvere l'esercizio è quello di ricondursi in qualche modo a variabili aleatorie reali. Sia $\bar{t} \in \mathbb{R}$ un punto di continuità di F_X. Definiamo la seguente funzione continua da $\overline{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}$:

$$\Phi_{\bar{t}}(x) := \begin{cases} \bar{t}-1 & & x \le \bar{t}-1 \\ x & \bar{t}-1 \le & x \le \bar{t}+1 \\ \bar{t}+1 & \bar{t}+1 \le & x \end{cases}$$

definiamo ora le seguenti v.a. $\widetilde{X}_n$ e $\widetilde{X}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{X}_n := \Phi_{\bar{t}}(X_n) \qquad \widetilde{X} := \Phi_{\bar{t}}(X) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

abbiamo così definito delle variabili aleatorie reali e con funzione di ripartizione uguale a quella delle X_n sull'intervallo $(\bar{t}-1, \bar{t}+1)$, utilizzando inoltre anche la continuità della funzione $\Phi_{\bar{t}}$ otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{X_n} = \widetilde{X} \qquad \text{quasi certamente}$$

$$F_{\widetilde{X}_n}(t) = F_{X_n}(t) \qquad F_{\widetilde{X}}(t) = F_X(t) \qquad \forall t \in (\bar{t}-1, \bar{t}+1)$$

quindi poiché le $\widetilde{X}_n$ sono reali vale

$$\lim_{n\to\infty} F_{\widetilde{X}_n}(\bar{t}) = F_{\widetilde{X}}(\bar{t})$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\bar{t}) = F_X(\bar{t})$$

Esercizio 2. (V. 6 punti.)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e X variabili aleatorie. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua, limitata, strettamente crescente e nulla in zero. sia infine

$$Y_n = f(X_n - X)$$

(a) Dimostrare che se $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$ allora $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} X$.

(b) Dimostrare che se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} X$ allora $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$.

Soluzione. Innanzitutto scriviamo in maniera esplicita le due condizioni di convergenza

(i) $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$ se e solo se $\mathbb{E}[|f(X_n - X)|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(ii) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob.} X$ se e solo se $\forall\epsilon > 0$ $P(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(a) (i) implica (ii)
Sia $\epsilon > 0$ fissato e sia $\delta_\epsilon := \min\{f(\epsilon), -f(-\epsilon)\} > 0$ cosicché:

$$|X_n - X| > \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |f(X_n - X)| > \delta_\epsilon$$

ovvero

$$\{|X_n - X| > \epsilon\} \qquad \subseteq \qquad \{|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon\}$$

quindi

$$0 \le P(|X_n - X| > \epsilon) \le P(|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon) \le \frac{\mathbb{E}[|f(X_n - X)|]}{\delta_\epsilon} \tag{1}$$

dove per l'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Markov. Passando al limite nell'equazione (1) dalla ipotesi (i) segue la tesi (ii).

(b) (ii) implica (i)
Si procede in maniera anologa a quanto fatto per il questito precedente salvo che δ_ϵ verrà definita con il max.
Sia $\epsilon > 0$ fissato e sia $\delta_\epsilon := \max\{f(\epsilon), -f(-\epsilon)\} > 0$ cosicché:

$$|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |X_n - X| > \epsilon$$

ovvero

$$\{|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon\} \qquad \subseteq \qquad \{|X_n - X| > \epsilon\}$$

quindi

$$0 \le P(|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon) \le P(|X_n - X| > \epsilon) \tag{2}$$

Per stimare $\mathbb{E}[|f(X_n - X)|]$ oltre all'equazione (2) occorre utilizzare anche l'ipotesi che la funzione f è limitata, sia M tale che $f(x) < M$ per ogni x.

$$\mathbb{E}[|f(X_n - X)|] = \mathbb{E}[|f(X_n - X)|\mathbf{1}_{|f(X_n-X)|\le\delta_\epsilon} + |f(X_n - X)|\mathbf{1}_{|f(X_n-X)|>\delta_\epsilon}]$$

$$\mathbb{E}[|f(X_n - X)|] \leq \delta_\epsilon + M \cdot P(|f(X_n - X)| > \delta_\epsilon)]$$

passando al limite per la condizione (ii) si ha:

$$0 \leq \liminf \mathbb{E}[|f(X_n - X)|] \leq \limsup \mathbb{E}[|f(X_n - X)|] \leq \delta_\epsilon$$

la condizione precedente deve valere per ogni $\epsilon > 0$, inoltre per la continuità della funzione f deve valere $\delta_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$. Quindi passando al limite per ϵ che tende a zero si ha:

$$\lim \mathbb{E}[|f(X_n - X)|] = 0$$

Un METODO alternativo per concludere il quesito (b) a partire dalla disequazione (2) è il seguente: poiché f è una funzione continua e nulla in zero allora per ϵ che va a zero anche δ_ϵ tende a zero quindi dalla (2) si deduce la convergenza in probabilità delle Y_n inoltre poiché la f è limitata allora le $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono anche uniformemente integrabili e quindi convergenza in probabilità più la uniforme integrabilità ci danno la convergenza in L^1.

Esercizio 3. (V. 9 punti.)
Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con $X_i \sim Exp(\lambda)$. Definiamo inoltre per ogni $n \geq 2$ e $m \geq 1$ le variabili

$$Y_{n,m} := \left\lfloor \frac{X_m}{\log(n)} \right\rfloor = \sup \left\{ i \in \mathbb{N} | i \leq \frac{X_m}{\log(n)} \right\}$$

$$S_n := \sum_{m=1}^{n} Y_{n,m}$$

(a) Per $\lambda > 2$, studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{S_n\}_{n\geq 2}$.
(b) Per $\lambda \in (1, 2]$, studiare la convergenza in distribuzione e in probabilità di $\{S_n\}_{n\geq 2}$.
(c) Per $\lambda = 1$, studiare la convergenza in distribuzione di $\{S_n\}_{n\geq 2}$.
(d)* (Facoltativo) Cosa si può dire per $\lambda \in (0, 1)$?

Soluzione. Il punto chiave per la risoluzione dell'esercizio sarà dato dal calcolo della probabilità $P(Y_{n,m} \neq 0)$.
$P(X_m > t) = e^{-\lambda t}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad P(Y_{n,m} \geq k) = P\left(\frac{X_m}{\log(n)} \geq k \right) = \frac{1}{n^{\lambda k}} \tag{3}$$

Per lo studio di S_n ci interessano solo le v.a $Y_{n,m}$ con $1 \leq m \leq n$, osserviamo inoltre che $Y_{n,m}$ è decrescente in n. Dalla stima (3) si deduce che la probabilità $P(Y_{n,m} = 0) = 1 - \frac{1}{n^\lambda}$ tende a 1 quando n tende all'infinito. Cominciamo con lo stimare la probabilità che non $Y_{n,m}$ non sia zero ovvero dobbiamo stimare $P(Y_{n,m} \geq 1)$ dalla (3) si ottiene immediatamente

$$P(Y_{n,m} \neq 0) = \frac{1}{n^\lambda}$$

(a) e (b) Nel caso $\lambda > 1$ dall'equazione precedente si deduce

$$\sum_m P(Y_{m,m} \geq 1) < \infty$$

quindi per il lemma di Borel-Cantelli quasi certamente $Y_{m,m} \neq 0$ per al più un insieme finito di m. Poiché per ogni fissato m si ha $Y_{n,m} \neq 0$ per al più un insieme finito di n allora si ha che la cardinalità degli (n, m) tali che $Y_{n,m} \neq 0$ è quasi certamente finita ovvero

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0 \qquad \text{quasi certamente}$$

Quindi c'è convergenza a zero anche in probabilità e in distribuzione.
(c) per $\lambda = 1$ valgono le seguenti cose

$$\begin{array}{ll} P(Y_{n,m} \geq 1) = \frac{1}{n} & \lim_{n\to\infty} P(Y_{n,m} \geq 1) = 0 \\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} P(Y_{n,m} \geq 1) = 1 \\ P(Y_{n,m} \geq 2) = \frac{1}{n^2} & \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} P(Y_{n,m} \geq 2) = 0 \end{array} \tag{4}$$

Le 3 condizioni sulla destra di (4) sono le ipotesi della legge dei piccoli numeri che ci dice che S_n tende in distribuzione ad una variabile aleatoria di Poisson di parametro 1.

Esercizio 4. (V. 9 punti.)
Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva e crescente tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie identicamente distribuite con distribuzione data da $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = \frac{1}{2}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo le σ-algebre:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) \qquad \mathcal{T}_n := \bigvee_{k>n} \mathcal{F}_k \qquad \mathcal{T} := \cap_n \mathcal{T}_n$$

.
Siano infine $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e Z assegnate nel seguente modo:

$Y_n := X_1 + \ldots + X_n$

$Z_n := \frac{Y_n}{a_n}$

$$Z := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Z_n & \text{se il limite esiste (anche eventualmente infinito)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Dimostrare che Z è $\mathcal{T}$ misurabile.
(b) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e tale che $P(|Z| = 7) = 1$
(c) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio tale che le $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siano indipendenti e $P(|Z| = +\infty) = 1$
(d)* (Facoltativo) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e tale che $P(Z = +\infty) = 1$

Soluzione.
(a) La v.a. Z è $\mathcal{T}$ misurabile se e solo se è $\mathcal{T}_n$ misurabile per ogni n.
Per ogni $\overline{n}$ occorre e basta mostrare che Z è $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ misurabile. In maniera intuitiva si può dire che dobbiamo mostrare che Z non dipende dalle v.a. $X_1, \ldots, X_{\overline{n}}$. Definiamo allora per ogni $n > \overline{n}$ le seguenti variabili:

$$\widetilde{Y}_n := X_{\overline{n}} + \ldots + X_n \qquad \widetilde{Z}_n := \frac{\widetilde{Y}_n}{a_n} \qquad Z := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} Z_n & \text{se il limite esiste} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cosicché per ogni $n > \overline{n}$ le v.a. $\widetilde{Y}_n$, $\widetilde{Z}_n$ e $\widetilde{Z}$ siano $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ misurabili. A questo punto è facile verificare che per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$Y_n - \widetilde{Y}_n = Y_{\overline{n}}$$

$$Z_n - \widetilde{Z}_n = \frac{Y_{\overline{n}}}{a_n}$$

e poiché a_n tende a più infinito passando al limite si ha:

$$Z = \widetilde{Z}$$

(b) Costruiremo un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e la condizione $P(|Z| = 7) = 1$.
Poiché non è richiesta l'indipendenza la cosa più semplice è scegliere X_1 come una v.a. tale che $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = \frac{1}{2}$ e definire le successive variabili per $n > 1$ con $X_n := X_1$. Cosicché per le v.a. Y_n si ha:

$$Y_n = n \cdot X_1 \qquad\qquad P(Y_n \in \{-n, +n\}) = 1$$

mentre per le Z_n vale

$$P\left(Z_n \in \left\{\frac{-n}{a_n}, \frac{+n}{a_n}\right\}\right) = 1$$

basta allora prendere $a_n := \frac{n}{7}$ per ottenere

$$P(|Z_n| = 7) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad P(|Z| = 7) = 1$$

(c) Dimostreremo che non è possibile costruire un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio tale che le $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siano indipendenti e $P(|Z| = +\infty) = 1$.
Poiché le v.a. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti, $\mathcal{T}$ è la σ-algebra coda e Z è $\mathcal{T}$ misurabile allora per la legge zero-uno di Kolmogorov Z deve essere quasi certamente costante in particolare ciò vuol dire:

$$P(Z = +\infty) \in \{0, 1\} \qquad \text{e} \qquad P(Z = -\infty) \in \{0, 1\}$$

Intuitivamente la dimostrazione si chiude dicendo che per ragioni di simmetria si deve avere $P(Z = +\infty) = P(Z = -\infty)$ quindi non potendo entrambe le probabilità essere uguali ad 1 allora devono essere uguali a zero. Un modo per giustificare in maniera rigorosa l'argomento intuitivo precedente è il seguente: La legge di $-X_n$ è la stessa di X_n, poiché le v.a. sono indipendenti allora anche la legge di $\{-X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uguale alla legge di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quindi la legge di $\{-Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uguale alla legge di $\{-Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da cui segue che la legge di $\{-Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è uguale alla legge di $\{-Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi la legge di $-Z$ è uguale alla legge di Z.

Esercizio 5. (V. 6 punti.)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due martingale indipendenti a valori in $\mathbb{N}$, con filtrazione comune $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $Z_n = X_{Y_n}$ (Cioè $Z_n(\omega) = X_{Y_n(\omega)}(\omega)$ per ogni ω) e $\mathcal{G}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$.
(a) Dimostrare che Z_n è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oppure costruire un controesempio?
(b) Dimostrare che Z_n è una martingala rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oppure costruire un controesempio?

Soluzione.
Costruiremo un controesempio per entrambi i quesiti. Affinché Z_n non sia una martingala occorre o che non sia un processo adattato alla rispettiva filtrazione o che non sia in L^1 o che non soddisfi la condizione $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n$ rispettivamente $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{G}_n] = Z_n$.
Costruiremo due martingale $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti tali che $Z_n = X_{Y_n}$ non stia in L^1.
Definiamo i processi stocastici $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo:
sia Y_1 variabile aleatoria discreta con

$$P(Y_1 = n) = \frac{1}{2^n} \qquad \text{per ogni intero } n \text{ positivo}$$

inoltre definiamo il resto del processo concludere

$$Y_n := Y_1$$

Per quanto riguarda la prima martingala la costruiamo come somma di v.a. indipendenti di media nulla. Siano $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie indipendenti concludere

$$P(T_n = 4^n) = P(T_n = -4^n) = \frac{1}{2} \qquad \forall n$$

e sia

$$X_n := T_1 + \ldots + T_n \qquad \forall n$$

la definizione precedente fa si che l'ultimo termine della somma sia molto maggiore in modulo dei precedenti e vale

$$|X_n| \geq |T_n| - |T_{n-1}| - \ldots - |T_1| = 4^n - 4^{n-1} - \ldots - 4 > \frac{4^n}{2}$$

possiamo ora stimare la norma L^1 di Z_1

$$|Z_1| = |X_{Y_1}| > \frac{4^{Y_1}}{2}$$

e quindi

$$\mathbb{E}[|Z_1|] = \mathbb{E}[|X_{Y_1}|] > \mathbb{E}\left[\frac{4^{Y_1}}{2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2} \cdot P(Y_1 = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \infty$$