Appello straordinario
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
30/03/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Sia $\{\mathcal{F}_j\}_{1\le j\le n}$ una filtrazione e sia $\{X_j\}_{1\le j\le n}$ una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_j\}_{1\le j\le n}$. Supponiamo inoltre che le due variabili aleatorie X_1 e X_n siano indipendenti.
(a) Dimostrare che $\mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)] = X_1$ quasi certamente.
(b) Dimostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $P(X_1 = c) = 1$.

SVOLGIMENTO
(a) Poiché $\{X_j\}_{1\le j\le n}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_j\}_{1\le j\le n}$ allora devono valere le relazioni:

$$\sigma(X_1) \subseteq \mathcal{F}_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_1] = X_1 \quad \text{q.c.}$$

ricordiamo adesso che per l'inclusione deve valere la relazione:

$$\mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_1]\ |\sigma(X_1)] = \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)]\ |\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)] \qquad \text{q.c.}$$

dunque

$$\mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)] = \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_1]\ |\sigma(X_1)] = \mathbb{E}[\ X_1\ |\sigma(X_1)] = X_1 \qquad \text{q.c.}$$

(b) Poiché X_n ed X_1 sono indipendenti allora deve valere

$$\mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)] = \mathbb{E}[X_n] \qquad \text{q.c.}$$

ma per il punto (a) vale anche $\mathbb{E}[X_n|\sigma(X_1)] = X_1$ quasi certamente dunque posto $c := \mathbb{E}[X_n]$ si ha:

$$X_1 = c \qquad \text{q.c.}$$

Esercizio 2.
Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{1\leq n\leq 3}$ una filtrazione e siano $\{X_n\}_{1\leq n\leq 3}$ e $\{Y_n\}_{1\leq n\leq 3}$ due martingale rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{1\leq n\leq 3}$. Siano infine:

$$Z_n := \min\{X_n, Y_n\} \qquad \forall n \in \{1,2,3\}$$

$$\tau := \begin{cases} 1 & \text{Se } Z_1 = Y_1 \\ 2 & \text{Se } Z_1 \neq Y_1 \end{cases}$$

$$W_n := Z_{n\wedge\tau} \qquad \forall n \in \{1,2,3\}$$

(a) Dimostrare che τ é un tempo di arresto.
(b) Dimostrare che $\{W_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è una supermartingale.
(c) Costruire un esempio che soddisfa le ipotesi dell'esercizio e tale che $\{W_n\}_{1\leq n\leq 3}$ non sia una martingala.

SVOLGIMENTO
(a) La v.a. τ assume solo i valori 1 e 2 quindi è sufficiente mostrare mostrare che gli eventi $\{\tau = 1\}$ e $\{\tau = 2\}$ appartengono rispettivamente a $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$.

$$\{\tau = 1\} = \{Z_1 = Y_1\} \in \mathcal{F}_1$$
$$\{\tau = 2\} = \{Z_1 \neq Y_1\} \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$$

(b) Se dimostro che $\{Z_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è una supermartingala allora lo è anche $\{W_n\}_{1\leq n\leq 3}$ poiché τ è un tempo di arresto e $\{W_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è la supermartingala $\{Z_n\}_{1\leq n\leq 3}$ arresta in τ. Quindi per concludere la dimostrazione basta mostrare che $\{Z_n\}_{1\leq n\leq 3}$ minimo delle martingale $\{X_n\}_{1\leq n\leq 3}$ e $\{Y_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è una supermartingala.

- Z_i è $\mathcal{F}_i$ misurabile perché minimo di v.a. che sono $\mathcal{F}_i$ misurabili.
- $\mathbb{E}[|Z_i|] = \mathbb{E}[|\min\{X_i, Y_i\}|] \leq \mathbb{E}[|X_i|] + \mathbb{E}[|Y_i|] < \infty$.
- $\mathbb{E}[Z_{i+1}|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[\min\{X_{i+1}, Y_{i+1}\}|\mathcal{F}_i] \leq \mathbb{E}[\min\{X_{i+1}\}|\mathcal{F}_i] \leq X_i$
  $\mathbb{E}[Z_{i+1}|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[\min\{X_{i+1}, Y_{i+1}\}|\mathcal{F}_i] \leq \mathbb{E}[\min\{Y_{i+1}\}|\mathcal{F}_i] \leq Y_i$
  dunque $\mathbb{E}[Z_{i+1}|\mathcal{F}_i] \leq \min\{X_i, Y_i\} = Z_i$.

(c) Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ lo spazio di probabilità definito da: $\Omega = \{a, b\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(a) = P(b) = 1/2$. Siano $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$. consideriamo le seguenti variabili aleatorie

$X_1(a) = X_1(b) = 0$	$X_2(a) = X_3(a) = 2$	e	$X_2(b) = X_3(b) = -2$
$Y_1(a) = Y_1(b) = 1$	$Y_2(a) = Y_3(a) = 1$	e	$Y_2(b) = Y_3(b) = 1$

$\{Y_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è costante quindi è certamente una martingala. Per quanto riguarda $\{X_n\}_{1\leq n\leq 3}$ è immediato verificare che X_1 è $\mathcal{F}_1$ misurabile e $X_2 = X_3$ è

$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$ misurabile. Inoltre poiché $\mathcal{F}_1$ è la sigma algebra banale vale $\mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0 = X_1$. Calcoliamo ora $\{Z_n\}_{1\leq n\leq 3}$:

$$\begin{array}{lll} Z_1(a) = 0 & Z_2(a) = 1 & Z_3(a) = 1 \\ Z_1(b) = 0 & Z_2(b) = -2 & Z_3(b) = -2 \end{array}$$

Dunque poiché $\mathbb{E}[Z_1] = 0 \neq \mathbb{E}[Z_2] = -\frac{1}{2}$ allora $\{Z_n\}_{1\leq n\leq 3}$ non può essere una martingala.

Esercizio 3.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie di Poisson indipendenti con distribuzione $X_n \sim Poisson(\lambda_n)$. (Con funzione caratteristica $\phi_n(t) = e^{\lambda_n(e^{it}-1)}$). Siano inoltre:

$$S_n := X_1 + X_2 \ldots + X_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \tfrac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Calcolare media e varianza di S_n e T_n.
(b) Assumendo $\sum_n \lambda_n = \lambda < \infty$, studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Assumendo $\sum_n \lambda_n = \infty$, studiare il limite $\lim_{n\to\infty} S_n$.
(d) Assumendo $\sum_n \lambda_n = \infty$, dimostrare che $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione ed in probabilità ad 1.
(e) Assumendo $\sum_n \lambda_n = \infty$, studiare la convergenza in L^2 di $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(f)(Facoltativo) Assumendo $\sum_n \lambda_n = \infty$, studiare la convergenza quasi certa di $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

SVOLGIMENTO
Osserviamo innanzitutto che S_n è somma di variabili aleatorie poissoniane indipendenti quindi è a sua volta una v.a. poissoniana e vale

$$S_n \sim Poisson\left(\overline{\lambda}_n\right) \qquad \text{con} \qquad \overline{\lambda}_n := \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

(a)

$$\mathbb{E}[S_n] = \overline{\lambda}_n \qquad VAR(S_n) = \overline{\lambda}_n$$

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]}\right] = 1$$

$$VAR(T_n) = VAR\left(\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]}\right) = VAR\left(\frac{S_n}{\overline{\lambda}_n}\right) = \frac{VAR(S_n)}{\left(\overline{\lambda}_n\right)^2} = \frac{1}{\overline{\lambda}_n}$$

(b) Prima di tutto la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona non decrescente in n quindi posso calcolarne il limite (che eventulmente potrebbe essere infinito)

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n$$

(chiaramente nella definizione precedente si intende per ogni $\omega \in \Omega$ $S(\omega) := \lim_{n\to\infty} S_n(\omega)$)
La funzione caratteristica di S_n è data da: $\phi_{S_n}(t) = e^{\overline{\lambda}_n(e^{it}-1)}$ che converge per n che tende all'infinito alla funzione caratteristica di una v.a. poissoniana di parametro $\overline{\lambda} := \sum_n \lambda_n$. Quindi $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione ad una poissoniana, la v.a. S definita precedentemente è quasi certamente finita e per l'unicità del limite si ha che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a S in distribuzione, in probabilità e quasi certamente. Resta da mostrare la convergenza in L^p. Per

la monotonia la v.a. S domina le v.a. S_n. Affinché ci sia convergenza in L^p occorre e basta che S sia in L^p, e questo è vero perché le v.a. poissoniane sono in L^p per ogni p. Verifichiamo che S sia in L^p.

$$||S||_{L^p}^p = \mathbb{E}[|S|^p] = \sum_k e^{-\overline{\lambda}} \frac{\overline{\lambda}^k}{k!} k^p < \infty \qquad \forall \overline{\lambda}, p > 0$$

(c) Supponiamo $\sum_n \lambda_n = \infty$, ovvero $\overline{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Dobbiamo mostrare che $P(S = \infty) = 1$, ovvero che per ogni $M > 0$ la probabilità che S sia minore di M è nulla. Osserviamo che $S \geq S_n$ per ogni n quindi per ottenere la tesi sarà sufficiente mostrare che $\lim_n P(S_n \leq M) = 0$ per ogni $M > 0$. Il limite è piuttosto semplice da calcolare:

$$P(S_n \leq M) = \sum_{k=0}^{M} e^{-\overline{\lambda}_n} \frac{\overline{\lambda}_n^k}{k!} \xrightarrow[\overline{\lambda}_n\to\infty]{} 0$$

(d)-(e) Dimostreremo direttamente la convergenza in L^2. Supponiamo $\sum_n \lambda_n = \infty$, ovvero $\overline{\lambda}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$$||T_n - 1||_{L^2}^2 = \mathbb{E}[(T_n - 1)^2] = \mathbb{E}[(T_n - \mathbb{E}[T_n])^2] = Var(T_n) = \frac{1}{\overline{\lambda}_n}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n - 1||_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad T_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 1 \ .$$

Esercizio 4.
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti e con le seguenti distribuzioni:
$P(X_n = -\frac{1}{n}) = P(X_n = 0) = P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$ e $Y_n \sim Unif(0,1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Siano infine $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assegnate nel seguente modo:

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

$$T_n := X_1 \cdot Y_1 + \ldots + X_n \cdot Y_n$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$$

(a) Dimostrare che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono martingale.
(b) Calcolare media e varianza di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Dimostrare che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono Tight.
(d) Studiare la convergenza in L^2 di S_n. (Suggerimento: dimostrare che la successione è di Cauchy rispetto alla norma L^2.)
(e)* (Facoltativo) Dimostrare che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente.

SVOLGIMENTO
$\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una filtrazione e posto

$$Z_k := X_k \cdot Y_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

si ha che la successione $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti ed adattate a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Riassumiamo ora le statistiche principali di X_n, Y_n e Z_n

$$\mathbb{E}[X_n] = 0 \qquad VAR(X_n) = \frac{2}{3n^2} \qquad \mathbb{E}[X_n^2] = \frac{2}{3n^2}$$

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2} \qquad VAR(Y_n) = \frac{1}{12} \qquad \mathbb{E}[Y_n^2] = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[Z_n] = 0 \qquad VAR(Z_n) = \frac{2}{9n^2} \qquad \mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{2}{9n^2}$$

(a) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono martingale sono martingale perché sono somma di v.a. indipendenti, adattate e a media nulla.
(b)

$$\mathbb{E}[S_n] = 0 \qquad VAR(S_n) = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \qquad \mathbb{E}[S_n^2] = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$$

$$\mathbb{E}[T_n] = 0 \qquad VAR(T_n) = \frac{2}{9}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \qquad \mathbb{E}[T_n^2] = \frac{2}{9}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$$

(c) Sia $c := \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} < \infty$ per ogni n valgono le seguenti disuguaglianze:

$$||S_n||_{L^2}^2 = VAR(S_n) \leq \frac{2}{3}c$$
$$||T_n||_{L^2}^2 = VAR(T_n) \leq \frac{2}{9}c$$

Poiché $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono equilimitate in L^2 allora sono Tight.
(d) Mostreremo che la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in L^2. Siano n ed m due numeri naturali con $m > n$. Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}[S_m - S_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} + \ldots + X_m] = 0 \\ \mathbb{E}[(S_m - S_n)^2] = VAR(S_m - S_n) + \mathbb{E}[S_m - S - n]^2 = \frac{2}{3}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{1}{j^2} \end{array}$$

poiché la serie $\sum_{j=n+1}^{m}\frac{1}{j^2}$ è convergente allora si ha:

$$||S_m - S_n||_{L^2}^2 = \frac{2}{3}\sum_{j=n+1}^{m}\frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{3}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$