Appello straordinario
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
14/06/2016

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1. (V. 8 punti.)
Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametri λ_1 e λ_2 quindi con densità congiunta:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) := \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)} & \text{Se } x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

siano inoltre assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$Z = \min\{X_1, X_2\} \qquad \text{e} \qquad W := \begin{cases} 1 & \text{Se } X_1 \leq X_2 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cosicché si abbia $Z = X_W$.
(a) Dato $s \geq 0$ calcolare $P(Z \geq s, W = 1)$.
(b) Quanto vale la probabilità $P(W = 1)$? (Sugg: utilizzare il risultato del quesito (a))
(c) Quanto vale $P(Z > s)$?
(d) Dimostrare che W e Z sono indipendenti.

Esercizio 2. (V. 8 punti.)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti con $X_n \sim Bern(\frac{1}{n^2})$ per ogni n e Y_n esponenziale di varianza $\sqrt{n}$. Siano inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n := \begin{cases} Y_n & \text{Se } X_n = 1 \\ -c_n & \text{Se } X_n = 0 \end{cases}$$

$$S_n := Z_1 + \ldots + Z_n$$

(a) Calcolare la media di Y_n e Z_n. Calcolare i valori di c_n per i quali $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingale.
Supporre d'ora in poi che la successione c_n assuma i valori calcolati al punto precedente.
(b) Calcolare la varianza di Z_n.
(c) Calcolare media e varianza di S_n.
(d) Dimostrare che la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.

Esercizio 3. (V. 6 punti.)
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(0,100)$. Per ogni $s \in (0,100)$ siano assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_{n,s} := \text{cardinalità}\{i \in \{1,\ldots,n\} | X_i \leq s\}$$

$$Z_{n,s} = I_{\{X_n \leq s\}} - \frac{s}{100}$$

(a) Quale è la distribuzione di $Y_{n,s}$? Calcolare media e varianza di $Y_{n,s}$.
(b) Fissato $s \in (0,100)$ dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n} = \frac{s}{100} \qquad \text{q.c.}$$

(c) Sia $W_{n,s} := Y_n - \frac{ns}{100}$ dimostrare che per ogni $s \in (0,100)$ la successione $\{W_{n,s}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala.

Esercizio 4. (V. 8 punti.)
Siano $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e p e q numeri tali che per ogni n si abbia $1 > q > p_n > p > 0$ e valga il limite $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Siano $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie con distribuzione uniforme su $(0,1)$ per ogni n sia infine assegante le seguenti varibili aleatorie:

$$X_n := I_{\{U_n<q\}} \qquad Y_n := I_{\{U_n<p_n\}} \qquad Z_n := I_{\{U_n<p\}}$$

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n \qquad T_n := Y_1 + \ldots + Y_n \qquad W_n := Z_1 + \ldots + Z_n$$

(a) Quali sono le distribuzioni di X_n, Y_n e Z_n? Calcolare media e varianza di S_n, T_n e W_n.
(b) Cosa si può dire dei limiti $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n}$?
(c) Dimostrare che vale

$$q \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \geq p \qquad \text{quasi certamente}$$

(d) Dimostrare che la somma $\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$ converge a p quasi certamente.