Esempio di prova scritta di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione e $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie uniformemente integrabili (non necessariamente adattate alla filtrazione). Sia infine $Y_{(n,m)} := \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m]$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.
(a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il processo $\{Y_{(n,m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.
(b) Dimostrare che la famiglia di variabili aleatorie $\{Y_{(n,m)}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ è uniformemente integrabile.

Esercizio 2.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione normale $X_n \sim N(0,1)$ sia infine

$$Y_n := n \cdot \min\{|X_1|, \dots, |X_n|\}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Studiare la convergenza quasi certa di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Quanto vale $\liminf_{n\to\infty} Y_n$?

`Può essere utile la funzione di ripartizione di una normale standard`

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Esercizio 3.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie positive i.i.d. con valore medio infinito $\mathbb{E}[X_n] = +\infty$. Sia infine

$$Y_n := \frac{\max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}}{n}$$

dimostrare che $\limsup_{n\to\infty} Y_n = +\infty$ quasi certamente.
`Può essere utile la relazione per variabili aleatorie` X `positive`

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

Esercizio 4.
Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ lo spazio di probabilità definito da $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{H} = \mathcal{B}(0,1)$ e P misura di Lebesgue. Consideriamo le seguenti variabili aleatorie

$$X(\omega) = \omega^2 \qquad Y(w) = \omega \cdot (1-\omega) \qquad\qquad \forall \omega \in \Omega$$

Calcolare $\mathbb{E}[X|Y]$. Esprimere il risultato in funzione di ω.

Esercizio 5.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$una successione di variabili aleatorie in L^1 definite su un medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Fornire una dimostrazione o trovare un controesempio alle seguenti affermazioni.

(a) Se X_n converge in distribuzione ad una distribuzione uniforme su $(0, 1)$ allora $\frac{X_n}{n}$ converge in probabilità a zero.
(b) Se X_n converge in distribuzione ad una distribuzione uniforme su $(0, 1)$ allora $\frac{X_n}{n}$ converge quasi certamente a zero.
(c) Se X_n converge in distribuzione ad una distribuzione uniforme su $(0, 1)$ allora $\frac{X_n}{n}$ converge a zero in L_1.