Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 1

David Barbato

Esercizio 1. *Mostrare che se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione crescente di eventi allora:*

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n = \cup A_n$$

Esercizio 2. *Mostrare che se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di eventi tali che* $\limsup A_n = \liminf A_n$ *allora*

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

Esercizio 3. *Data una successione di eventi* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(a) Dimostrare che

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup(A_n)) \tag{1}$$

(b) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianza della disequazione (1) *sono strette.*

Esercizio 4. *Sia* $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *uno spazio di probabilità e sia* $\mathcal{A}$ *un'algebra tale che* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$*. Dimostrare che per ogni* $H \in \mathcal{H}$ *e* $\epsilon > 0$ *esiste* $A \in \mathcal{A}$ *tale che* $P(H \triangle A) < \epsilon$*.*

Esercizio 5. *Sia* $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *uno spazio di probabilità e sia* $\mathcal{A}$ *la collezione di eventi:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) \in \{0, 1\}\}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ *è una* σ*-algebra*

Esercizio 6. *Sia* $\mathcal{C}$ *la collezione di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *data da:*

$$\mathcal{C} := \{(-a, a) : a > 0\}$$

e sia $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$*.*
(a) Dimostrare che se A *appartiene ad* $\mathcal{A}$ *allora* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *dove* $-A := \{x : -x \in A\}$*.*
*(b)** Dimostrare che se* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *allora* A *appartiene ad* $\mathcal{A}$*.*

Esercizio 7. *Sia* Ω *un insieme più che numerabile e sia* $\mathcal{A}$ *la collezione di sottoinsiemi di* Ω *data da:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega | A \text{ oppure } A^c \text{ è finito o numerabile}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ *è una* σ*-algebra e la seguente funzione* P *è una misura di probabilità su* $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito o numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è finito o numerabile} \end{cases}$$

(b) A cosa serve l'ipotesi Ω *è più che numerabile? Può essere rimossa?*

Esercizio 8. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in ogni* $x \in \mathbb{R}$*. Mostrare che* f' *è misurabile. (Notare che* f *derivabile non vuol dire che ha derivata continua.)*