Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 2

David Barbato

Esercizio 1. *Siano X e Y due variabili aleatorie reali tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $P(X = x) = P(Y = x) = 0$. Si considerino le seguenti affermazioni:*

- *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale*

$$P(X > a, Y > b) = P(X > a)P(Y > b)$$

- *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale*

$$P(X > a, Y < b) - P(X < a)P(Y > b) = P(X > a) - P(Y > b)$$

Per ciascuna delle affermazioni precedenti stabilire se implica l'indipendenza delle v.a. X e Y. In caso affermativo fornire una dimostrazione, in caso negativo fornire un controesempio.

Esercizio 2. *Un'urna contiene una pallina rossa ed una verde. Ogni volta che estraggo una pallina, prima dell'estrazione successiva reinserisco la pallina estratta ed una pallina verde. Mostrare che in una successione infinita di estrazioni, con probabilità 1 la pallina rossa è estratta infinite volte.*

Esercizio 3. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, sia $X := \limsup X_n$*
(a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $P(X > x) \in \{0, 1\}$.

Esercizio 4. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tali che, $P(X_n > 0) \in (0, 1)$. Siano*

$$A := \{X_n > 0 \text{ per infiniti valori di } n\}$$

$$B := \{\exists N \text{ tale che } X_n > 0 \text{ per ogni } n > N\}$$

(a) Dimostrare che $P(A) = 1$ e che $P(B) = 0$.
(b) Trovare un controesempio nel caso sia rimossa l'ipotesi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identicamente distribuite.*

Esercizio 5. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $Exp(1)$ cioè con funzione di ripartizione $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{[0,\infty)(x)}$. Per ogni $\omega \in \Omega$ e $p \in \mathbb{R}$ si definisca*

$$N_p(\omega) := \{n : X_n(\omega) \geq p \log(n)\}$$

Calcolare in funzione di p quanto vale la probabilità $P(|N_p| = +\infty)$.

Esercizio 6. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione* $Exp(1)$ *cioè con funzione di ripartizione* $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbf{1}_{[0,\infty)(x)}$. *Sia* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definito da:*

$$Y_n := \frac{max\{X_1, \ldots, X_n\}}{n}$$

Dimostrare che $Y_n \to 0$ *quasi certamente. (****Può essere utile la disuguaglianza*** $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$ ***per ogni*** $\alpha \in (0,1)$ ***e*** $n \in \mathbb{N}$*)*