Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 3

David Barbato

Esercizio 1. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione* $Exp(1)$ *cioè con funzione di ripartizione* $F(x) = (1-e^{-x})\mathbf{1}_{[0,\infty)(x)}$. *Sia*

$$Y_n := \frac{X_n}{\log(n)} \qquad \textit{per ogni } n > 1$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Studiare la convergenza in probabilità di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(d) Studiare la convergenza quasi certa di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(e) Studiare la convergenza in L^p *di* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 2. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione* $Exp(1)$ *cioè con funzione di ripartizione* $F(x) = (1-e^{-x})\mathbf{1}_{[0,\infty)(x)}$. *Sia*

$$Y_n := \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\log(n)} \qquad \textit{per ogni } n > 1$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione F_{Y_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Studiare la convergenza in probabilità di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
*(d)*** Studiare la convergenza quasi certa di* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 3. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che per ogni* n *si abbia* $\mathbb{E}[X_n] = -1$ *e* $P(X_n \in \{1, -n^2\}) = 1$. *Sia infine*

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n \qquad \textit{per ogni } n > 1$$

(a) Calcolare la funzione di densità discreta di X_n.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 4. *Sia* X *una variabile aletaoria quasi certamente positiva mostrare che vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

Mostrare inoltre che per ogni $p \geq 1$ vale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^p - (n-1^p))P(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X^p] \leq \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)^p - n^p)P(X > n)$$

Mostrare infine che se X è a valori in $\mathbb{N}$ allora le disuguaglianze precedente diventano uguaglianze.

Esercizio 5. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, quasi certamente positive e di media finita. Sia*

$$Y_n := \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{n}$$

(a) Quanto vale il limite

$$\lim_{n\to\infty} nP(X_1 > n)$$

(b) Quanto vale il limite

$$\lim_{n\to\infty} nP(X_1 > nt) \qquad \text{con } t > 0$$

(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
*(d)** E' possibile rimuovendo la sola ipotesi "X_n di media finita" costruire un esempio di distribuzione per X_n tale che $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga quasi certamente a più infinito.*

Esercizio 6. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, sia $\mathcal{T}_n$ la sigma algebra generata da $(X_k)_{k\geq n}$ e sia $\mathcal{T} = \cap_n \mathcal{T}_n$ la sigma algebra coda. Dimostrare che:*
(a) $\limsup_n X_n$ è $\mathcal{T}$ misurabile.
(b) $\liminf_n X_n$ è $\mathcal{T}$ misurabile.
(c) $\limsup_n \frac{X_n}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.
(d) $\limsup_n \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.
(e) Supponiamo ora $P(X_n \geq 0) = 1$ per ogni n mostrare che $\limsup_n \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.
(f) Cosa si può dire di $\limsup_n \max\{X_1, \ldots, X_n\}$? Costruire un esempio tale che il limite precedente non è $\mathcal{T}$ misurabile e vale $P(X_n \geq 0) = 1$ per ogni n.