Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 5

David Barbato

Theorem 1. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie,sia* X *un'ulteriore variabile aleatoria, siano* F_n*,* F*,* q_n *e* q *le rispettive funzioni di ripartizione e funzioni quantili. Sono cose equivalenti:*

(a) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

(b) per ogni x *punto di continuità di* F *vale:* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$

(c) per ogni x *punto di continuità di* q *vale:* $\lim_{n\to\infty} q_n(x) = q(x)$

Theorem 2. *Se* $X_n \xmapsto{p} X$ *allora* $X_n \xmapsto{d} X$.

Theorem 3. *Sia* $c \in \mathbb{R}$. *Se* $X_n \xmapsto{d} c$ *allora* $X_n \xmapsto{p} c$.

Theorem 4. *Se* $X_n \xmapsto{p} X$ *e* $X_n \xmapsto{p} Y$ *allora* $P(X = Y) = 1$.

Theorem 5. *Se* $X_n \xmapsto{q.c.} X$ *allora* $X_n \xmapsto{p} X$.

Esercizio 1. *Sia* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una successione di v.a. con distribuzione*

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{n2^k+3^{k-1}}{(n+1)4^k} & \text{per ogni } k \text{ intero positivo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Verificare che l'equazione precedente definisce effettivamente la distribuzione di una variabili aleatorie discreta.
(b) Dimostrare che X_n *converge in distribuzione ad una v.a. geometrica di parametro* p*. Quanto vale* p*?*

Esercizio 2. *Sia* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una successione di v.a. con distribuzione*

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = 0 \text{ oppure } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $(X_n)_{n\geq 0}$.

Esercizio 3. *Sia* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una successione di v.a. con distribuzione*

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $(X_n)_{n\geq 0}$.

Esercizio 4. *Siano Y e $(X_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ un insieme di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che Y abbia distribuzione bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{6}$ e le X_n siano uniformi sull'intervallo $(0,3)$. Siano infine $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $T_n = \min(Y, X_n)$ e $W_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_n$.*
(a) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n.
(b) Studiare la convergenza in probabilità quasi certa e in L^p di Z_n.
(c) Calcolare F_{T_n}. Qual è il supporto di T_n?
(d) Quanto vale la probabilità $P(W_n \leq Z_n)$?
(e) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di W_n.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[T_n]$.

Svolgimento (a) Per studiare la convergenza in distribuzione di Z_n utilizzeremo la condizione (b) del teorema 1. Prima di tutto dobbiamo calcolare la funzione di ripartizione F_{Z_n}.

$$F_{X_n}(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \frac{a}{3} & 0 \leq a < 3 \\ 1 & 3 \leq a \end{cases}$$

$$\begin{gathered} F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t) = P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq t) = \\ = 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > t) = 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_n > t) = \\ = 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t) \cdot \cdots \cdot P(X_n > t) = \\ = 1 - (1 - F_{X_1}(t)) \cdot (1 - F_{X_2}(t)) \cdot \cdots \cdot (1 - F_{X_n}(t)) = \\ = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n \end{gathered}$$

per $t \in (0,3)$ si ha $F_{Z_n}(t) = 1 - (1 - \frac{t}{3})^n$. Dunque:

$$F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{3})^n & 0 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t \end{cases}$$

Per studiare la convergenza in distribuzione di Z_n è sufficiente studiare il limite $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}$.

$$\begin{array}{ll} \text{se } t < 0 & \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \text{se } t \in (0,3) & \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - \frac{t}{3})^n = 1 \\ \text{se } t > 3 & \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{array} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in (0,3) \\ 1 & t > 3 \end{cases}$$

Quindi per il teorema 1 si ha $Z_n \xrightarrow{d} Z$ con $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ e dunque $Z_n \xrightarrow{d} 0$.

(b) Poiché Z_n converge in distribuzione ad una costante allora (teorema 3) converge anche in probabilità: $Z_n \xrightarrow{p} 0$. Per lo studio della convergenza quasi certa innanzitutto osserviamo che poiché converge in probabilità a 0 allora (per i teoremi 5 e 4) se converge in maniera quasi certa deve convergere quasi certamente a zero. Dalle seguenti relazioni

$$Z_{n+1} = \min\{Z_n, X_{n+1}\} \leq Z_n \qquad P(Z_n \in (0,3)) = 1$$

segue che $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona e limitata dunque la successione Z_n converge in maniera quasi certa e si ha

$$Z_n \xrightarrow{q.c.} 0\,.$$

Infine per il teorema di convergenza dominata si ha che: $Z_n \xrightarrow{L^p} 0\,.$

(c) Si procede come per il calcolo di F_{Z_n}.

$$F_{T_n}(t) = P(\min(Y, X_n) \leq t) = 1 - P(\min(Y, X_n) > t) =$$

$$= 1 - P(Y > t, X_n > t) = 1 - P(Y > t) \cdot P(X_n > t) =$$
$$= 1 - (1 - F_Y(t)) \cdot (1 - F_{X_n}(t))$$

E' sufficiente ora sostituire nell'espressione precedente i valori di F_{X_n} e F_Y

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{3} & 0 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t \end{cases} \qquad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{5}{6} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$$

consideriamo separatamente i quattro casi: $t < 0$, $t \in [0,1)$, $t \in [1,3)$ e $t \geq 3$.

$$\begin{array}{ll} \text{se } t < 0 & F_{T_n}(t) = 1 - (1-0)(1-0) = 0 \\ \text{se } t \in [0,1) & F_{T_n}(t) = 1 - (1-\frac{5}{6})(1-\frac{t}{3}) = \frac{5}{6} + \frac{t}{18} \\ \text{se } t \in [1,3) & F_{T_n}(t) = 1 - (1-1)(1-\frac{t}{3}) = 1 \\ \text{se } t \geq 3 & F_{T_n}(t) = 1 - (1-1)(1-1) = 1 \end{array}$$

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{5}{6} + \frac{t}{18} & t \in [0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Il supporto di T_n è l'intervallo chiuso $[0,1]$.

(d) Occorre calcolare:

$$P(W_n \leq Z_n) = P(T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n \leq \min(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

Sappiamo che $T_n \leq X_n$ e per il quesito (c) anche $P(T_n \in [0,1]) = 1$. Dunque:

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n \leq \min(T_1, T_2, \ldots, T_n) \leq \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{q.c.}$$

quindi si ha

$$P(W_n \leq Z_n) = 1$$

Per convincersi del risultato appena ottenuto, si può anche procedere nel seguente modo, si suppone che il minimo $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sia realizzato in k cioè $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_k$ quindi si ha
$Z_n = X_k$
$W_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n = (T_1 \cdot \ldots \cdot T_{k-1} \cdot T_{k+1} \cdot \ldots \cdot T_n) \cdot T_k \leq T_k \leq X_k$
dove le ultime due disuguaglianze seguono dal fatto che $(T_1 \cdot \ldots \cdot T_{k-1} \cdot T_{k+1} \cdot \ldots \cdot T_n) \in [0,1]$ e $T_k \leq X_k$.
(e) Il risultato del quesito (c) $T_n \in [0,1]$ ci dice che $W_n = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_n$ è una successione monotona e limitata, dunque converge quasi certamente, in probabilità e in distribuzione. Per capire qual è la variabile aleatoria a cui converge si possono utilizzare i risultati dei quesito (b), (c) e (d). Per i quesiti (d) e (c) abbiamo $0 \leq W_n \leq Z_n$. Mentre per il quesito (b) Z_n converge quasi certamente a zero.
Quindi

$$W_n \xrightarrow{q.c.} 0 \qquad W_n \xrightarrow{p} 0 \qquad W_n \xrightarrow{d} 0$$

(f) La variabile aleatoria W_n è di tipo mista ha due atomi in zero e in uno, $P(T_n = 0) = \frac{5}{6}$, $P(T_n = 1) = \frac{1}{9}$ ed ha una componente uniformemente distribuita tra $(0,1)$ con

$$\frac{d}{dt} F_{T_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{18} & t \in (0,1) \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

METODO 1. Il valore atteso di T_n è dato da:

$$\mathbb{E}[T_n] = \int t dF_{T_n}(t)$$

dove l'integrale va inteso come integrale di Stieltjes. Poiché la funzione F_{T_n} è C_1 ad eccezione dei punti $\{0,1\}$ è possibile calcolare questo integrale sommando i contributi della parte discreta e di quella continua:

$$\mathbb{E}[T_n] = 0 \cdot P(T_n = 0) + 1 \cdot P(T_n = 1) + \int_0^1 t \cdot \frac{1}{18} dt = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

METODO 2 in maniera alternativa è possibile calcolare il valore atteso di T_n utilizzando la funzione quantile e la formula:

$$\mathbb{E}[T_n] = \int_0^1 q(x)dx$$

questo secondo metodo permette di evitare di utilizzare gli integrali di Stieltjes. La funzione $q : (0,1) \to \mathbb{R}$ è la funzione quantile di T_n e può essere ricavata dalla (1):

$$q(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \frac{5}{6} \\ 18(x - \frac{5}{6}) & \frac{5}{6} \leq t < \frac{8}{9} \\ 1 & \frac{8}{9} \leq t < 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[T_n] = \int_0^1 q(x)dx = \frac{5}{36}$$

Esercizio 5. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che ciascuna X_n abbia distribuzione bernoulliana di parametro $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$, con $\alpha > 0$. Siano infine $S_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ e $W_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.*
(a) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione. Per i valori di α in cui converge indicarne il limite.
(b) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità. Per i valori di α in cui converge (in probabilità) indicarne il limite.
(c) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente. Per i valori di α in cui converge (quasi certamente) indicarne il limite.
(d) Per quali valori di $\alpha > 0$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in L^p. Per i valori di α in cui converge (in L^p) indicarne il limite.
(e) Studiare la convergenza quasi certa ed in L^p di $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(f) Calcolare $\mathbb{E}[S_n]$. (`Lasciare il risultato sotto forma di sommatoria`
(g) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n]$.
(h) Studiare la convergenza in probabilità di $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. `(Utilizzare il risultato del questito (g) e la disuguaglianza di Markov)`
(i) Studiare la convergenza in L^p di $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
*(l)*** Studiare la convergenza quasi certa di S_n.*

Svolgimento

$(a) \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha} & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0 \qquad \forall \alpha > 0$

(b) Poiché converge in distribuzione ad una costante allora (teorema 3) converge anche in probabilità. $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0 \qquad \forall \alpha > 0$

(c) Vogliamo utilizzare lemma di Borel-Cantelli sugli eventi $X_n > \epsilon$. Dobbiamo stimare la serie $\sum_n P(|X_n| > \epsilon)$ se ϵ è maggiore di 1 allora la stima è banale. Consideriamo il caso $\epsilon \in (0,1)$

$$\sum_n P(|X_n| > \epsilon) = \sum_n \frac{1}{(n+1)^\alpha} \begin{cases} = \infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < \infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

dunque $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$ se e solo se $\alpha > 1$.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

dunque $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 0$ per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $p \geq 1$.

(e) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata e monotona dunque converge quasi certamente ad una variabile qualche variabile aleatoria W. Dalla definizione delle variabili aleatorie W_n segue che W è definita nel modo seguente:

$W = \begin{cases} 1 & \text{Se } X_n = 1 \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{Se } X_n = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Il variabile limite W è una v.a. bernoulliana con:

$$P(W = 0) = P(X_n = 0\ \forall n) = \prod_n (1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$$

sappiamo che

$$\prod_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_n \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \leq 1$$

Dunque per $\alpha \in (0,1]$ si ha $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 1$. Mentre per $\alpha > 1$ si ha

$$W_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} W \quad \text{con} \quad W \sim Bern(1 - \prod_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right))$$

(f) $\mathbb{E}[S_n] = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^\alpha}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^\alpha}$
Se $m < n$ allora

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(i+1)^\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{(i+1)^\alpha} \leq \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\frac{1}{(m+1)^\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\frac{1}{(m+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+m)^\alpha}$$

Dunque per ogni m vale la disuguaglianza

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq \frac{1}{(1+m)^\alpha}$$

da cui segue

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] \leq 0$$

poiché infine $\mathbb{E}[S_n] \geq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_n] = 0$.
(h) Dalla disuguaglianza di Markov abbiamo $P(S_n > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n]}{\epsilon}$ dunque

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \limsup_{n} \mathbb{E}[S_n] = 0$$

da cui si ottiene $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$
Un metodo alternativo per risolvere il quesito (h) poteva essere quello di dedurlo dal prossimo quesito (i).
(i) Convergenza in L^p con $p \geq 1$. Poiché $S_n \in [0,1]$ allora per $p \geq 1$ si ha $|S_n|^p \leq S_n$ quindi

$$\|S_n - 0\|_{L^p}^p \leq \mathbb{E}[S_n]$$

inoltre per il quesito (g) vale $\lim_n \mathbb{E}[|S_n - 0|^p] = \lim_n \mathbb{E}[|S_n|] = 0$ dunque S_n converge a zero in L^p per ogni $p \geq 1$

Esercizio 6. *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(-1,5)$ e siano inoltre $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite come segue:*

$$Z_n := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad\qquad T_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

(a) Calcolare F_{X_n}, $\mathbb{E}[X_n]$ e F_{T_n}.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di Z_n.
(c) Studiare la convergenza in L^p di Z_n.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di T_n.

Svolgimento

(a) Per le variabili aleatorie uniformi su (a, b) valgono le formule:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

dunque

$$\mathbb{E}[X_n] = 2 \qquad\qquad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{6} & -1 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

Calcoliamo F_{T_n} utilizzando la definizine di funzione di ripartizione.
$F_{T_N}(t) = P(T_n \le t) = P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \le t) =$
passando al complementare...
$= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > t) = 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_n > t) =$
utilizzando l'indipendenza
$= 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t) \cdot \cdots \cdot P(X_n > t) = 1 - (1 - F_{X_1}(t)) \cdot (1 - F_{X_2}(t)) \cdot \cdots \cdot (1 - F_{X_n}(t)) = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n$
Dunque

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - \left(1 - \frac{x+1}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5-x}{6}\right)^n & -1 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

(b) Le $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono v.a. i.i.d. con $\mathbb{E}[X_n] = 2$ dunque per la legge forte dei grandi numeri si ha:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \mathbb{E}[X_n] = 2$$

Dunque

$$Z_n \xrightarrow{q.c.} 2$$

Per il teorema 5

$$Z_n \xrightarrow{p.} 2$$

Per il teorema 2

$$Z_n \xrightarrow{d.} 2$$

(c) Le variabili X_n hanno distribuzione uniforme su $(-1, 5)$ dunque vale $|X_n| \le 5$ da cui si ricava

$$|Z_n| = \left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \right| \le \frac{|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|}{n}$$

$$|Z_n| \leq \frac{\overbrace{5+5+\cdots+5}^{n \text{ volte}}}{n} = \frac{5n}{n} = 5$$

Per il teorema di convergenza dominata poiché S_n converge quasi certamente a 2 allora si ha:

$$\lim_n \mathbb{E}[|S_n - 2|^p] = \mathbb{E}[\lim_n |S_n - 2|^p] = 0$$

dunque

$$Z_n \xrightarrow{L^p} 2 \qquad \text{per ogni } p \geq 1$$

(d) La successione T_n è monotona ed equilimitata quindi converge quasi certamente e per il teorema di convergenza dominata converge in L^p per ogni p. Occorre stabilire qual è il limite.

Cominciamo con lo studio della convergenza in distribuzione. Bisogna calcolare il $\lim_{n\to\infty} F_{T_n}$.

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 - \left(1 - \frac{t+1}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5-t}{6}\right)^n & -1 \leq t < 5 \\ 1 & t \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{Se} \qquad t < -1 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\text{Se} \qquad t = -1 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1 - 1^n = 0$$

$$\text{Se} \qquad -1 < t < 5 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{5-t}{6}\right)^n$$

$t \in (-1, 5)$ implica che $0 < \frac{5-t}{6} < 1$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = 1$$

$$\text{Se} \qquad t \geq 5 \qquad \text{allora} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 & t > -1 \end{cases}$$

Dunque T_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria T con distribuzione:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & t \geq -1 \end{cases}$$

ovvero

$$T_n \xrightarrow{d.} -1$$

Da cui si deduce

$$T_n \xrightarrow{p} -1 \qquad T_n \xrightarrow{q.c.} -1 \qquad T_n \xrightarrow{L^p} -1$$