Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 6

David Barbato

Esercizio 1. *Sia* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $\mathbb{R}$ *e sia* x *un ulteriore numero reale. Dimostrare che* δ_{x_n} *converge debolmente a* δ_x *se e solo se* x_n *tende ad* x. *Dove* δ_x *indica la distribuzione su* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *concentrata in* x *cioè tale che* $\delta_x(x) = 1$.

Esercizio 2. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione di poisson* $X_n \sim Poisson(1)$. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *siano inoltre* $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ *e* $Z_n = n^\alpha Y_n$ *con* $\alpha > 0$.
(a) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di Z_n.
(b) Studiare la convergenza in* L^p *di* Z_n. *Assumere come noto che tutti i momenti di una variabile di Poisson siano finiti.*

Esercizio 3. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione* $X_n \sim Unif((0,1))$. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *siano inoltre*
$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ *e* $Z_n = n^\alpha Y_n$ *con* $\alpha > 0$.
(a) Studiare al variare di $\alpha > 0$ *la convergenza in distribuzione di* Z_n.
(b) Studiare la convergenza quasi certa di Z_n *per* $\alpha > 1$.
*(c)** Studiare la convergenza quasi certa di* Z_n *per* $\alpha \in (0,1)$.
Siano $T = \limsup Z_n$ *e* $W = \liminf Z_n$.
(d) Cosa si può dire delle variabili aleatorie T *e* W*?*
*(e)** Studiare la convergenza quasi certa di* Z_n *per* $\alpha = 1$.

Esercizio 4. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie equilimitate e crescenti in* n *cioè assumiamo che esista una costante* $M > 0$ *tale che per ogni* n *si abbia* $X_n \leq M$ *quasi certamente e* $P(X_{n+1} \geq X_n) = 1$.
(a) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di X_n.
(b) Cosa si può dire della convergenza in L^p*?*

Esercizio 5. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie definite sul medesimo spazio di probabilità. Supponiamo che abbiano la distribuzione* $X_n \sin Unif(0, 2^n)$. *Sia inoltre* $Y_n = (X_n)^{\frac{1}{2}}$.
(a) Studiare la convergenza in distribuzione di Y_n.
(b) Studiare la convergenza in probabilità di Y_n.
(c) Studiare la convergenza quasi certa di Y_n.
(d) Cosa si può dire della convergenza di Y_n *in* L^p*?*

Esercizio 6. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione:*

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \qquad P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n^2}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di X_n.
(b) Studiare la convergenza in probabilità di X_n.
(c) Studiare la convergenza quasi certa di X_n.
(d) Cosa si può dire della convergenza di X_n *in* L^p*?*