Primo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
07/02/2017

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $P(X_n \in \mathbb{N}) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia inoltre

$$Y_n := \log(X_n!) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $0! = 1$. Supponiamo infine che $Y_n \in L^1$ per ogni n.
(a) Cosa si può dire di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? È una martingala, una supermartingala o una sottomartingala?

Svolgimento
Per costruzione Y_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile e per ipotesi è in L^1. Resta da capire se $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq = \geq Y_n$ q.c.
Sia $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione data da: $\varphi(k) := \log(k!)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora vale:

$$\varphi(k) = \log(k!) = \log(1) + \log(2) + \ldots + \log(k)$$
$$\varphi(k+1) - \varphi(k) = \log(k+1)$$

Poiché gli incrementi sono crescenti allora la funzione φ è convessa e posso applicare la disuguaglianza di Jensen.

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \varphi(X_n) = Y_n \qquad q.c.$$

dunque $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottomartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 2.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti adattate alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con distribuzione $X_n \sim Bern(\frac{1}{n})$. Siano inoltre assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$
\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=n+1}^{2n} X_n \\
T &:= \limsup_{n\to\infty} S_n \\
W &:= \liminf_{n\to\infty} S_n
\end{aligned}
$$

(a) Studiare la convergenze di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p
(b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A quale distribuzione converge?
(c) Quali sono le distribuzioni di W e T?
(d) Cosa si può dire della convergenza in probabilità di S_n?

Svolgimento
(a)

$$
F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}
$$

Quindi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{distr} 0$ e poiché converge in distribuzione ad una costante allora vale anche $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob} 0$.
Se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente deve convergere quasi certamente a zero. Sia $\epsilon \in (0,1)$ allora $P(|X - 0| > \epsilon) = \frac{1}{n}$. Poiché sono indipendenti e $\sum_n P(|X - 0| > \epsilon) = \infty$ allora per il lemma di Borel-Cantelli si ha che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere quasi certamente a zero.
Per quanto riguarda la convergenza in L^p la cosa più semplice da fare è calcolare esplicitamente il limite:

$$
\lim_{n\to\infty} \|X_n - 0\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0
$$

dunque $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in L^p per ogni p.
(b) Osserviamo innanzitutto che vale:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= X_2 \\
S_2 &= X_3 + X_4 \\
S_3 &= X_4 + X_5 + X_6 \\
S_4 &= X_5 + X_6 + X_7 + X_8
\end{aligned}
$$

Allo scopo di utilizzare la legge dei piccoli numeri effettuiamo il seguente cambio di notazione:

$$Y_{n,j} := X_{n+j} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

quindi avremmo che per ogni n le v.a. $\{Y_{n,j}\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ sono indipendenti ed hanno distribuzione $Y_{n,j} \sim Bern\left(\frac{1}{n+j}\right)$. Con le nuove notazioni si ha:

$$\begin{aligned}
&S_1 = Y_{1,1} \\
&S_2 = Y_{2,1} + Y_{2,2} \\
&S_3 = Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3} \\
&\ldots\ldots \\
&S_n = Y_{n,1} + \ldots\ldots + Y_{n,n}
\end{aligned}$$

Le ipotesi per applicare la legge dei piccoli numeri si verificano tutte banalmente ad eccezione del limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1)$$

dobbiamo stimare le seguenti somme:

$$\sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

stimiamo le somme con l'integrale di $1/x$ come segue

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{x} dx$$

integriamo

$$\log\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \leq \log(2)$$

e infine passiamo al limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1) = \log(2)$$

Quindi $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione ad una poissoniana di parametro $\lambda := \log(2)$

(c) Consideriamo la sottosuccesione $\{S_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $n_k := 2^k$. Per costruzione si tratta di una successione di v.a indipendenti che converge in distribuzione ad una v.a. S poissoniana. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{k} P(S_{n_k} = m) = P(S = m) > 0$$

Sommando in k si ottiene:

$$\sum_k P(S_{n_k} = m) = \infty$$

quindi per il lemma di borel cantelli si ha che per ogni m l'evento $S_{n_k} = m$ si verifica quasi certamente per infiniti $k \in \mathbb{N}$. Per cui si ottiene

$$W = \liminf_n S_n = 0 \qquad q.c.$$
$$T = \limsup_n S_n = +\infty \qquad q.c.$$

(d) Supponiamo per assurdo che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga in probabilità ad una v.a. S. Possiamo allora estrarre una sottosuccessione $\{S_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge quasi certamente a S. Consideriamo la sottosottosuccesione:

$$T_k := S_{n_{2^k}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti e con argomento analogo a quello usato nel quesito (c) si ha: $\liminf_k T_k = 0$ $q.c.$ e $\limsup_k T_k = +\infty$ $q.c.$ questo contraddice l'ipotesi che $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente.

Esercizio 3.

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione naturale associata ad $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (cioè $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$). Con $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$. Definiamo inoltre le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := X_1 + \ldots + X_n$$
$$Z_n := |Y_n|$$
$$\tau := \inf\{n \geq 1 | Z_n^{2017} \geq n\}$$

(a) Dimostrare che τ è un tempo di arresto.
(b) Cosa si può dire di $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingale, una supermartingala o una sottomartingala?
(c) Quanto vale $P(\tau = \infty)$?

Svolgimento
(a)

$$\{\tau = n\} = \{Z_1^{2017} < n\} \cap \ldots \cap \{Z_{n-1}^{2017} < n\} \cap \{Z_n^{2017} \geq n\} \in \mathcal{F}_n$$

(b) Y_n è somma di v.a. indipendenti a media nulla, dunque $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala. Poiché la funzione modulo è una funzione convessa applicando il teorema di Jensen si dimostra che $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottomartingala.
(c)

$$\tau(\omega) = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad Z_n^{2017}(\omega) < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

osserviamo ora che $Z_n^{2017} < n$ se solo se $-n < Y_n^{2017} < n$. Y_n è somma di v.a. normali indipendenti e vale:

$$Y_n \sim N(0,n) \qquad \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

quindi

$$P(\tau = \infty) \leq \inf_n P(Z_n^{2017} < n) = \inf_n P\left(-n^{\frac{1}{2017}-\frac{1}{2}} < \frac{Y_n}{\sqrt{n}} < n^{\frac{1}{2017}-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Esercizio 4.
Costruire, se esiste, un esempio di due successione di variabilili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tali che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indipendente da $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente una sottomartingala e una supermartingala rispetto ad una medesima filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- posto $Z_n := X_n + Y_n$ si abbia $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- per ogni n valga:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] > X_n \qquad q.c.$$
$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] < Y_n \qquad q.c.$$

Svolgimento
La soluzione più semplice è data da:

$$X_n = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$Y_n = -n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le v.a. sono indipendenti perchè sono costanti e le ulteriori proprietà si verificano facilmente.

Esercizio 5.
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $X \sim exp(\lambda = \frac{1}{2})$ e $Y \sim Unif(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Siano inoltre assegnate le v.a. S e T nel seguente modo:

$$\begin{cases} S := \sqrt{X}\cos(Y) \\ T := \sqrt{X}\sin(Y) \end{cases}$$

(a) Calcolare la funzione di densità del vettore aleatorio (X, Y).
(b) Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T).
(c) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti? A quale distribuzione appartiene la v.a. T?

Soluzione
(c) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti e $T \sim N(0, 1)$.