Terza prova parziale di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
27/01/2017

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una supermartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dimostrare che se $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala.

Svolgimento Poiché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala, allora soddisfa le condizioni:

- X_n è $\mathcal{F}_n$ per ogni n
- $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$

Affinché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una martingala resta da mostrare che soddisfa anche la condizione $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ q.c. per ogni n. Per ipotesi sappiamo che $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$ per ogni n quindi vale anche $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{n-1}]$ ovvero $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}] = 0$. Utilizzando inoltre l'ipotesi $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala si ottengono le seguenti cose:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]\ ] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}] = 0 \\ \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0 \qquad q.c. \end{cases}$$

Per semplicità di notazioni sia $Y_n := \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$. Le condizioni sopra diventano:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y_n] = 0 \\ Y_n \leq 0 \qquad q.c. \end{cases}$$

Poiché $Y_n \leq 0 \quad q.c.$ vale $\mathbb{E}[Y_n] = -\mathbb{E}[|Y_n|] = 0$, quindi $Y_n = 0$ q.c. ovvero:

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \qquad q.c.$$

Esercizio 2.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti adattate alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dimostrare che se $X_0 \in L^1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $P(X_n < X_{n+1}) = 0$ allora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Se possibile separare la dimostrazione nelle seguenti due parti:
(a) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(b)$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Svolgimento
(a) Sappiamo che $X_0 \geq X_n \geq X_{n+1}$, che X_0 è in L^1 e che le v.a. X_n e X_{n+1} sono indipendenti. Vogliamo mostrare che X_n è in L^1, poiché sappiamo che X_n è limitata dall'alto da una variabile(X_0) in L^1 occorre trovare qualcosa che la limiti dal basso. Mostreremo che le ipotesi:

- $X_n \geq X_{n+1}$ q.c.
- X_n e X_{n+1} sono indipendenti.

implicano che esiste una costante $c_n \in \mathbb{R}$ tale che $P(X_n \geq c_n \geq X_{n+1}) = 1$.
Sia $c \in \mathbb{R}$ allora vale:

$$\{X_n < X_{n+1}\} \supseteq \{X_n < c\} \cap \{c < X_{n+1}\}$$

poiché X_n e X_{n+1} sono indipendenti vale:

$$P(\{X_n < c\} \cap \{c < X_{n+1}\}) = P(\{X_n < c\})P(\{c < X_{n+1}\}) = 0$$

chiaramente $\lim_{c\to\infty} P(X_n < c) = \lim_{c\to-\infty} P(c < X_{n+1}) = 1$ quindi per c abbastanza grande si avrà $P(\{X_n < c\}) > 0$ e $P(\{c < X_{n+1}\}) = 0$, mentre per c abbastanza piccolo si avrà $P(\{c < X_{n+1}\}) > 0$ e $P(\{X_n < c\}) = 0$ posto

$$c_n := \sup\{c \in \mathbb{R} | P(c < X_{n+1}) > 0\}$$

vale:

$$P(X_n \geq c_n \geq X_{n+1}) = 1$$

A questo punto poiché $X_0 \geq X_n \geq c_n$ allora X_n è compresa tra due variabili in L^1 ed é a sua volta in L^1.
(b) $X_n - X_{n-1}$ é minore di zero quasi certamente quindi $E[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] < 0$ q.c.

Esercizio 3.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione naturale associata ad $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (cioè $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \ldots, X_n)$). Dimostrare che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora

$$\text{sup\_ess}(X_n) \leq \mathbb{E}[X_{n+1}] \qquad \text{per ogni } n.$$

Dove $\text{sup\_ess}(X_n)$ indica il sup essenziale di X_n ovvero

$$\text{sup\_ess}(X_n) := \inf\{c \in \mathbb{R} | P(X_n > c) = 0\}$$

Svolgimento Poiché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una submartingala vale:

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \qquad q.c.$$

poiché X_{n+1} e $\mathcal{F}_n$ sono indipendenti vale:

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] \qquad q.c.$$

quindi

$$X_n \leq E[X_{n+1}] \qquad q.c.$$

ovvero

$$\text{sup\_ess}(X_n) \leq \mathbb{E}[X_{n+1}]$$

Esercizio 4.
Costruire un esempio di successione di variabilili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti, che sia una supermartingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma tale che $P(X_n < X_{n+1}) \neq 0$ per qualche n.

Svolgimento 1
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie con la seguente distribuzione:

$$\begin{cases} P(X_0 = 1) = 1 \\ P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \\ P(X_n = 0) = 1 \qquad \forall n \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

Le variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono sicuramente indipendenti perché sono tutte q.c. costanti tranne una. Sia infine $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione naturale di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Le v.a. X_n sono per costruzione $\mathcal{F}_n$ misurabili ed sono in L^1 perché sono limitate, vale inoltre:

$$\begin{cases} E[X_1|\mathcal{F}_0] = E[X_1] = 1 \qquad \leq X_0 \quad q.c. \\ E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[0|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \qquad \leq X_{n-1} \quad q.c. \end{cases} \tag{2}$$

infine $P(X_0 < X_1) = \frac{1}{2}$

Svolgimento 2 È possibile costruire l'esempio scrivendo in maniera esplicita lo spazio di probabilità su cui si trovano le v.a.
Sia $\Omega := \{a, b\}$ sia $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ e sia $\mathcal{F}_n := \mathcal{P}(\Omega)$ per $n \geq 1$ e $P(a) = P(b) = \frac{1}{2}$.
Allora poniamo:

$$\begin{cases} X_0(a) = X_0(b) = 1 \\ X_1(a) = 0 \qquad X_1(b) = 2 \\ X_n(a) = X_n(b) = 0 \qquad \forall n \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

Allora le v.a. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti, sono una supermartingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e vale $P(X_n < X_{n+1}) \neq 0$

Esercizio 5.
Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2+y^2| < 1\}$.
(a) Calcolare la funzione di densità delle variabili marginali X e Y.
(b) Calcolare $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[XY]$ e la covarianza $\mathrm{cov}(X,Y)$. (`Sugg: sfruttare dove possibile le proprietà dell'integrale di funzioni dispari.`)
(c) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
(d) Sia $S = X$ e sia $T = \frac{Y}{\sqrt{1-X^2}}$. Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S,T). Eseguire un disegno del supporto di (S,T).

Svolgimento
(a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & y \in (-1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] = \mathrm{cov}(X,Y) = 0$
(c) Non sono indipendenti, se fossero indipendenti si dovrebbe avere $f_{(X,Y)} = f_X \cdot f_Y$ quasi certamente. Oppure se fossero indipendenti si dovrebbe avere $P(X > 0.9, Y > 0.9) = P(X > 0.9)P(Y > 0.9)$ mentre invece si ha $P(X > 0.9) > 0$, $P(Y > 0.9) > 0$ e $P(X > 0.9, Y > 0.9) = 0$
(d) Il supporto di (S,T) è il quadrato Q che ha i lati sulle rette $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. La densità è:

$$f_{(S,T)}(s,t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} & (s,t) \in Q \\ 0 & (s,t) \notin Q \end{cases}$$