

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 1

Riepilogo

David Barbato

Esercizio 1. *Mostrare che se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di eventi allora:*

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n = \cup A_n$$

Esercizio 2. *Mostrare che se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di eventi tali che $\limsup A_n = \liminf A_n$ allora*

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

Esercizio 3. *Data una successione di eventi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$*
(a) Dimostrare che

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup(A_n)) \quad (1)$$

(b) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianze della disequazione (1) sono strette.

Esercizio 4. *Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ un'algebra tale che $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Dimostrare che per ogni $H \in \mathcal{H}$ e $\epsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $P(H \triangle A) < \epsilon$.*

Esercizio 5. *Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ la collezione di eventi:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) \in \{0, 1\}\}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra

Esercizio 6. *Sia $\mathcal{C}$ la collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ data da:*

$$\mathcal{C} := \{(-a, a) : a > 0\}$$

e sia $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.

(a) Dimostrare che se A appartiene ad $\mathcal{A}$ allora A è un boreliano e vale $A = -A$ dove $-A := \{x : -x \in A\}$.

*(b)** Dimostrare che se A è un boreliano e vale $A = -A$ allora A appartiene ad $\mathcal{A}$.*

Esercizio 7. Sia Ω un insieme più che numerabile e sia $\mathcal{A}$ la collezione di sottoinsiemi di Ω data da:

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega \mid A \text{ oppure } A^c \text{ è finito o numerabile}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ -algebra e la seguente funzione P è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito o numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è finito o numerabile} \end{cases}$$

(b) A cosa serve l'ipotesi Ω è più che numerabile? Può essere rimossa?

Esercizio 8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$. Mostrare che f' è misurabile. (Notare che f derivabile non vuol dire che ha derivata continua.)

Esercizio 9. Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, sia $\mathcal{T}_n$ la sigma algebra generata da $(X_k)_{k \geq n}$ e sia $\mathcal{T} = \cap_n \mathcal{T}_n$ la sigma algebra coda. Dimostrare che:

(a) $\limsup_n X_n$ è $\mathcal{T}$ misurabile.

(b) $\liminf_n X_n$ è $\mathcal{T}$ misurabile.

(c) $\limsup_n \frac{X_n}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.

(d) $\limsup_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.

(e) Supponiamo ora $P(X_n \geq 0) = 1$ per ogni n mostrare che

$\limsup_n \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{n}$ è $\mathcal{T}$ misurabile.

(f) Cosa si può dire di $\limsup_n \max\{X_1, \dots, X_n\}$? Costruire un esempio tale che il limite precedente non è $\mathcal{T}$ misurabile e vale $P(X_n \geq 0) = 1$ per ogni n .