

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 4

David Barbato

Esercizio 1. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e X variabili aleatorie. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, limitata, strettamente crescente e nulla in zero. Sia infine

$$Y_n = f(X_n - X)$$

- (a) Dimostrare che se $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0$ allora $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob.} X$.
- (b) Dimostrare che se $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob.} X$ allora $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0$.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva e crescente tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie identicamente distribuite con distribuzione data da $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = \frac{1}{2}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo le σ -algebre:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) \quad \mathcal{T}_n := \bigvee_{k > n} \mathcal{F}_k \quad \mathcal{T} := \bigcap_n \mathcal{T}_n$$

Siano infine $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e Z assegnate nel seguente modo:

$$Y_n := X_1 + \dots + X_n$$

$$Z_n := \frac{Y_n}{a_n}$$

$$Z := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n & \text{se il limite esiste (anche eventualmente infinito)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che Z è $\mathcal{T}$ misurabile.
- (b) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e tale che $P(|Z| = 7) = 1$
- (c) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio tale che le $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ siano indipendenti e $P(|Z| = +\infty) = 1$

Esercizio 3. Siano $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione e p e q numeri tali che per ogni n si abbia $1 > q > p_n > p > 0$ e valga il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Siano $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme su $(0, 1)$ per ogni n siano infine assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$\begin{aligned} X_n &:= I_{\{U_n < q\}} & Y_n &:= I_{\{U_n < p_n\}} & Z_n &:= I_{\{U_n < p\}} \\ S_n &:= X_1 + \dots + X_n & T_n &:= Y_1 + \dots + Y_n & W_n &:= Z_1 + \dots + Z_n \end{aligned}$$

- (a) Quali sono le distribuzioni di X_n , Y_n e Z_n ? Calcolare media e varianza di S_n , T_n e W_n .
 (b) Cosa si può dire dei limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{n}$?
 (c) Dimostrare che vale

$$q \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \geq p \quad \text{quasi certamente}$$

- (d) Dimostrare che la somma $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ converge a p quasi certamente.

Esercizio 4. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e assolutamente continue con densità f_n assegnata:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n^\alpha}{(n^\alpha x + 1)^2} & \text{Se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di ripartizione di X_n . Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della successione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p . Eventualmente considerare la convergenza in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Considerare separatamente i casi $\alpha < -1$, $\alpha \in [-1, 0)$, $\alpha = 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $\alpha > 1$.

Esercizio 5. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. assolutamente continue con densità f assegnata:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{Se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia inoltre

$$Y_n := n^\alpha \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione di Y_n .
 (b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.