Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 5

David Barbato

Esercizio 1. *Calcolare la funzione caratteristica delle variabili aleatorie assolutamente continue aventi le seguenti densità:*

(a) Per ogni $a > 0$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} & x \in [0, a] \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$

(b)Per ogni $a \in \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-a|}$

Esercizio 2. *Sia* X *una variabile aleatoria a valori in* $\mathbb{Z}$*, sia* φ *la sua funzione caratteristica. Mostrare che vale*

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi(t)dt$$

`Sugg. si mostri dapprima che per ogni` j `e` k `interi vale`

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}e^{ijt}dt = \begin{cases} 2\pi & \texttt{se } k = j \\ 0 & \texttt{se } k \neq j \end{cases}$$

Esercizio 3. *Siano* X *e* Y *due variabile aleatorie indipendenti con distribuzioni:* $X \sim Poisson(\lambda_1)$, $Y \sim Poisson(\lambda_2)$*. Calcolare la funzione caratteristica di* X, Y *e* $X + Y$*, dedurre che* $X + Y$ *è ancora una distribuzione di Poisson.*

Esercizio 4. *Siano* X *e* Y *due variabile aleatorie indipendenti con distribuzioni:* $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$*. Assumere come nota la funzione caratteristica della normale standard* $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$*. Calcolare la funzione caratteristica di* X, Y *e* $X+Y$*, dedurre che* $X+Y$ *è ancora una distribuzione di Normale.*

Esercizio 5. *Siano* X *e* Y *due variabile aleatorie con* $X \sim exp(1)$ *e* $Y = \frac{X}{\lambda}$ *con* $\lambda > 0$*.*
(a) Calcolare la funzione caratteristica di X*.*
(b) Calcolare le derivate della funzione caratteristica di X *e dimostrare che* $\mathbb{E}[x^n] = n!$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*.*
(c) Calcolare la funzione di ripartizione di Y*. La v.a.* Y *appartiene ad una famiglia di distribuzioni note?*
(d) Calcolare i momenti della variabile aleatoria Y*.*