Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 6

David Barbato

Esercizio 1. *(36-ese-2010 s)*
Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha y & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-1| < 1, \ |y-2| < 2 \ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(X+Y>1)$ e $\mathbb{P}(X+Y>1|Y<1)$.
(d) Calcolare la funzione di ripartizione del vettore (X,Y).
Sia $S = X+Y$ e $T = Y$.
(e) Calcolare la densità congiunta del vettore (S,T).
(f) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?

Esercizio 2. *(39-ese-2010 s)*
Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(2x^2y+1) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y-1| < 1\}$.
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare la covarianza $cov(X,Y)$.
(d) Sia $S = \frac{X}{Y}$ e sia $T = Y$. Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S,T).

Esercizio 3. *(02-04-2011 s)*
Sia (X,Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \alpha e^{-(x^2+y^2+xy)}) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}$$

Sia $S = X+Y$ e sia $T = X-Y$.
(a) Calcolare la densità congiunta del vettore (S,T).

(b) Calcolare la funzione di densità f_S. (**Può essere utile l'uguaglianza:** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.)
(c) Calcolare la funzione di densità f_T.
(d) Quanto vale α?
(e) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti?
(f) Quali sono le distribuzioni di S e T? (**Indicare solo i nome delle distribuzioni e i loro parametri.**)
(g) Qual è la distribuzione di X? (**Esprimere X in funzione di S e T**)

Soluzioni

Esercizio 1

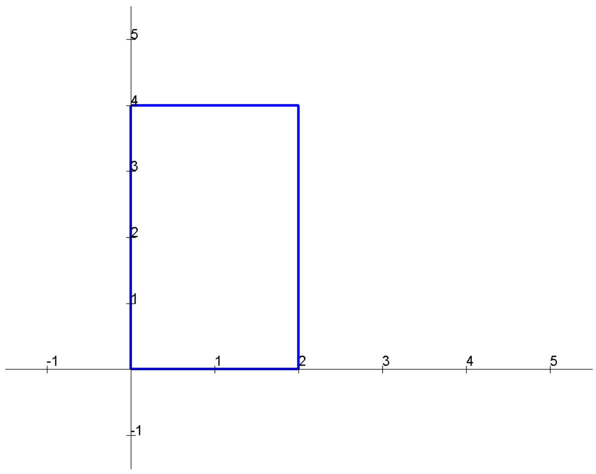

Figure 1: Supporto D

Il supporto D (figura 1) ha una forma rettangolare, esplicitando i moduli all'interno della definizione si ha $-1 < x - 1 < 1$ e $-2 < y - 2 < 2$ e dunque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 2, \ 0 < y < 4 \ \}$$

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = \iint_D \alpha y\ dxdy = \alpha \cdot \int_0^4\int_0^2 y\ dxdy =$$
$$= \alpha \cdot \int_0^4 2y\ dy = \alpha \cdot 2 \left|\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=4} = 16\alpha$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{16}$.
(b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \begin{cases} 0 & x \notin (0,2) \\ \int_0^4 \alpha y dy & x \in (0,2) \end{cases}$$
$$\int_0^4 \alpha y dy = \alpha \left|\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=4} = \alpha \cdot 8 = \frac{1}{2}$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,2) \\ \frac{1}{2} & x \in (0,2) \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \int_0^2 \alpha y dx & y \in (0,4) \end{cases}$$
$$\int_0^2 \alpha y dy = \alpha \left|yx\right|_{x=0}^{x=2} = \alpha \cdot 2y = \frac{1}{8}y$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,4) \\ \frac{1}{8}y & y \in (0,4) \end{cases}$$
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\ dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{2}\ dx & t \in (0,2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t & t \in (0,2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$
$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)\ dy = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{8}y\ dy & t \in (0,4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{16}t^2 & t \in (0,4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

(c) Passando al complementare si ha $P(X+Y > 1) = 1 - P(X+Y \leq 1)$. Siano A e B le due regioni indicate nella figura 2.

$$P(X+Y \leq 1) = P((X,Y) \in A) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \alpha y\ dy\ dx =$$

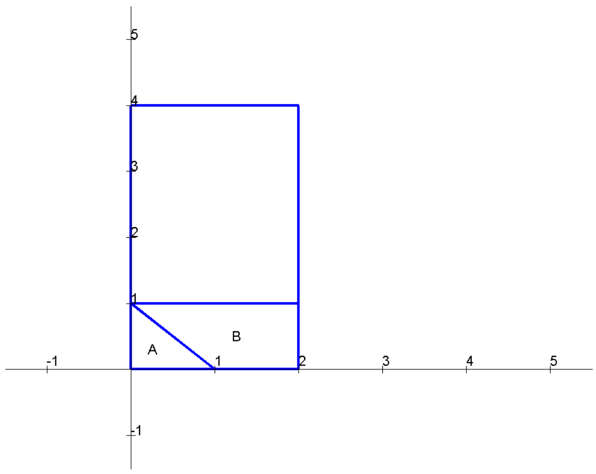

Figure 2: Regioni A e B

$$= \int_0^1 \left| \alpha \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \alpha \frac{1-2x+x^2}{2}\ dx =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left| x - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{96}$$

Dunque

$$P(X+Y>1) = 1 - P(X+Y \leq 1) = 1 - \frac{1}{96} = \frac{95}{96}$$

$$\begin{aligned} P(X+Y>1|Y<1) &= \frac{P\left(\{X+Y>1\} \cap \{Y<1\}\right)}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P\left((X,Y) \in B\right)}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P\left(\{Y<1\} \setminus \{X+Y \leq 1\}\right)}{P(Y<1)} \\ &= \frac{P(Y<1) - P(X+Y \leq 1)}{P(Y<1)} \end{aligned}$$

$$P(Y<1) = F_Y(1) = \frac{1}{16} \qquad P(X+Y \leq 1) = \frac{1}{96}$$

$$P(X+Y>1|Y<1) = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{96}}{\frac{1}{16}} = \frac{5}{6}$$

(d) Per calcolare $F_{(X,Y)}(x,y)$ distinguiamo due casi $(x,y) \notin D$ e $(x,y) \in D$. Se $(x,y) \notin D$ allora vale almeno una delle seguenti 4 condizioni $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \geq 2$ e $y \geq 4$. Per le quali si ha:

$$\begin{array}{ll} F_{(X,Y)}(x,y) = 0 & x \leq 0 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = 0 & y \leq 0 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = F_Y(y) & x \geq 2 \\ F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) & y \geq 4 \end{array}$$

Resta da considerare il caso $(x,y) \in D$. Per $(x,y) \in D$ si ha:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_0^x \alpha t \; ds \; dt = \int_0^y \alpha t x \; dt = \left| \alpha x \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=y} = \frac{\alpha x y^2}{2} = \frac{x y^2}{32}$$

(e) Sia $g(x,y) = (x+y, y)$ e calcoliamone l'inversa $h(s,t) = g^{-1}(s,t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} S = X+Y \\ T = Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X+T = S \\ Y = T \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = S-T \\ Y = T \end{array} \right. \tag{1}$$

dunque si ha $h(s,t) = (s-t, t)$.
Sia D_2 il supporto del vettore aleatorio (S,T).
Dai vincoli su X e Y: $0 < X < 2$ e $0 < Y < 4$ utilizzando le equazioni (1) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < S-T < 2 \\ 0 < T < 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S-T > 0 \\ S-T < 2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T < S \\ T > S-2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{array} \right.$$

Dunque il supporto D_2 (figura 3) di (S,T) è dato da $D_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t < s, t > s-2, t > 0, t < 4\}$ e
$P((S,T) \in D_2) = 1$. Calcoliamo ora la matrice iacobiana di h.

$$J_h(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|det(J_h)| = 1$$

Allora per $(s,t) \in D_2$ si ha:

$$f_{(S,T)}(s,t) = f_{(X,Y)}(h(s,t)) \cdot |det(J_h)| = f_{(X,Y)}(s-t,t) \cdot 1 = \alpha t$$

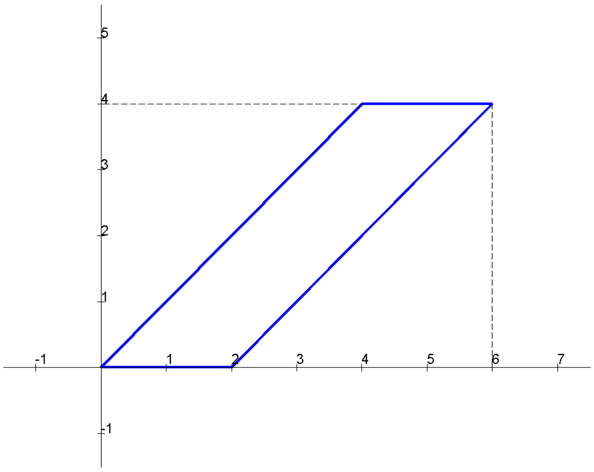

Figure 3: Supporto D_2

(f) Affinché X e Y siano indipendenti occorre e basta che valga l'uguaglianza $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ per ogni $(x,y) \in D_2$. Supponiamo $(x,y) \in D_2$ cioè $0 < x < 2$ e $0 < y < 4$ allora si ha

$$F_X(x) = \frac{1}{2}x$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{16}y^2$$

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{16}y^2 = \frac{xy^2}{32} = F(X,Y)(x,y)$$

Le variabili aleatorie S e T non sono indipendenti infatti il supporto di (S,T) è un parallelogrammo mentre se fossero indipendenti il supporto di (S,T) dovrebbe essere il prodotto dei supporti di S e T e quindi dovrebbe essere un rettangolo.

È possibile mostrare la non indipendenza di S e T anche osservando che sul quadrato $Q = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 2, \ 2 < y < 4 \ \}$ si ha
$P(Q) = 0$, dunque

$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) = 0$$

mentre $P(0 < X < 2) > 0$ e $P(2 < Y < 4) > 0$, implica

$$P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4) > 0$$

e dunque

$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) \neq P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4)$$

Esercizio 2
(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx = \iint_D \alpha(2x^2y+1)dydx =$$

$$= \alpha \cdot \int_{-1}^{1}\int_0^2 2x^2y+1\ dydx = \alpha \cdot \int_{-1}^{1}\left[2\frac{x^2y^2}{2}+y\right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \alpha \cdot \int_{-1}^{1} 4x^2+2\ dx = \alpha \cdot \left[4\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1} = \alpha\left(\frac{8}{3}+4\right) = \frac{20}{3}\alpha$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{3}{20}$.
(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy$$

Per $x \notin (-1,1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dy = 0$
Per $x \in (-1,1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy = \int_0^2 \alpha(2x^2y+1)\ dy =$$

$$= \alpha \left| 2x^2\frac{y^2}{2}+y\ \right|_{y=0}^{y=2} = \alpha\left(4x^2+2\right)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1,1) \\ \alpha\left(4x^2+2\right) & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx$$

Per $y \notin (0,2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx = 0$
Per $y \in (0,2)$ invece

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dx = \int_{-1}^{1} \alpha(2x^2y+1)\ dx =$$

$$= \alpha \left| 2\frac{x^3}{3}y + x \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha\left(\frac{4}{3}y+2\right)$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,2) \\ \alpha\left(\frac{4}{3}y+2\right) & y \in (0,2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y.

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx$$

Per $a \leq -1$ si ha $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_{(X)}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{a} 0\ ds = 0$
Per $a \geq 1$ si ha $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$
Per $-1 < a < 1$ invece

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\ dx = \int_{-1}^{a} \alpha\left(4x^2+2\right)\ dx =$$

$$= \alpha \left| \frac{4}{3}x^3 + 2x \right|_{x=-1}^{x=a} = \alpha\left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}a^3 + 2a\right)$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \alpha\left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}a^3 + 2a\right) & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 0 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}b^2 + 2b\right) & 0 < b < 2 \\ 1 & b \geq 2 \end{cases}$$

(c) Utilizziamo l'uguaglianza $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ risolvendo:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \cdot \alpha\left(4x^2+2\right)\ dx = \alpha\left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\ dy$$

$$= \int_0^2 y \cdot \alpha \left(\frac{4}{3}y + 2\right)\ dx = \alpha \left[\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2} = \alpha\frac{68}{9}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\ dydx =$$

$$= \int_0^2 \int_{-1}^1 xy \cdot \alpha \left(2x^2y + 1\right)\ dxdy =$$

$$= \int_0^2 \alpha \left[2\frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2}\right]_{x=-1}^{x=1}\ dy = 0$$

Quindi

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$$

(d) Prima di tutto invertiamo il sistema,

$$\begin{cases} S = \frac{X}{Y} \\ T = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = SY \\ Y = T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ST \\ Y = T \end{cases}$$

Calcoliamo il supporto D_2 delle variabili aleatorie (S,T).

$$\begin{cases} |X| < 1 \\ |Y-1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |ST| < 1 \\ |T-1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < ST < 1 \\ -1 < T-1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ST > -1 \\ ST < 1 \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S > -\frac{1}{T} \\ S < \frac{1}{T} \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < T < 2 \\ -\frac{1}{T} < S < \frac{1}{T} \end{cases}$$

Dunque $D_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2, -\frac{1}{t} < s < \frac{1}{t}\}$
Calcoliamo ora la matrice Iacobiana.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Iacobiana è t e dunque per la densità di (S,T) si ha:
se $(s,t) \notin D_2$, $f_{(S,T)}(s,t) = 0$
se invece $(s,t) \in D_2$

$$f_{(S,T)}(s,t) = f_{(X,Y)}(st,t) \cdot |t| = \alpha(2s^2t^2t + 1)t = \alpha(2s^2t^4 + t)$$

Esercizio 3

(a) Ricaviamo X e Y in funzione di S e T

$$\begin{array}{l} X = \frac{S+T}{2} \\ Y = \frac{S-T}{2} \end{array} \qquad \left|\det\begin{pmatrix} \frac{d}{dS}X & \frac{d}{dT}X \\ \frac{d}{dS}Y & \frac{d}{dT}Y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$f_{(S,T)}(s,t) = \frac{\alpha}{2}e^{-((\frac{S+T}{2})^2+(\frac{S-T}{2})^2+\frac{S+T}{2}\frac{S-T}{2})} = \frac{\alpha}{2}e^{-(\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{4}t^2)} \qquad \forall(s,t)\in\mathbb{R}^2$$

(b)

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s,t)dt = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{3}{4}s^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}t^2}dt = \alpha\sqrt{\pi}e^{-\frac{3}{4}s^2}$$

(c)

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s,t)ds = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{1}{4}t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2}ds = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

(d) Per la positività delle funzioni di densità deve essere $\alpha \geq 0$. Per calcolare il valore esatto di α è sufficiente porre l'integrale da meno infinito a più infinito di una funzione di densità uguale a uno.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)ds = \alpha\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2}ds = \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

(e) Le variabili X e Y sono indipendenti infatti sostituendo ad α il valore $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ si ottiene facilmente $f_{(S,T)}(s,t) = f_S(s)\cdot f_T(t)$ per ogni s e t.

(f) $S \sim N(0,\frac{2}{3})$, $T \sim N(0,2)$

(g) Poiché $X = \frac{S+T}{2}$, S e T sono normali e indipendenti allora anche X è una distribuzione normale. $\mathrm{VAR}[X] = \frac{1}{4}(\mathrm{VAR}[S]+\mathrm{VAR}[T]) = \frac{2}{3}$ dunque $X \sim N(0,\frac{2}{3})$