Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 7

David Barbato

A partire dal 11/01/2017 sono accessibili tutti gli esercizi degli appelli dell'anno scorso che sono scaricabili dalla pagina del corso 2015-2016. Inoltre riporto i seguenti esercizi.

Esercizio 1. (06/09/2016)
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie congiuntamente indipendenti con $P(X_n = -1) = P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{3}$ e $Y_n \sim Bern(\frac{1}{n})$ per ogni n. Sia inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$T_n := X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n$$

(a) Calcolare la media di T_n.
(b) La successione $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala?
(c) Calcolare la funzione caratteristica di T_n.
(d) La successione $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight?

Esercizio 2. (22/09/2016)
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti) con distribuzione $X_n \sim Bin(n, \frac{1}{n})$, sia inoltre $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala negativa.
(a) Dimostrare che la successione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.
(b) Dimostrare che la successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.
(c) Dimostrare che esiste una sottosuccessione dei numeri naturali $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che posto

$$Z_k = (X_{n_k} + Y_{n_k})^2$$

si abbia $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione.

Esercizio 3. (22/09/2016)
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie, siano $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due filtrazioni tali che per ogni n valga $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{G}_n$.
(a) È vero che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora lo è anche rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
(b) È vero che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora lo è

anche rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
`Fornire una dimostrazione per le affermazioni vere ed un controesempio per quelle false.`

Esercizio 4. (22/09/2016)
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala positiva, sia $k > 0$ e siano definite le seguenti successioni di variabili aleatorie:

$$Y_n := k^{X_n} \qquad \text{e} \qquad Z_n := (X_n)^k$$

Supponiamo infine che le variabili aleatorie Y_n e Z_n siano in L^1.
(a) La successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, una supermartingala oppure una submartingala?
(b) La successione $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, una supermartingala oppure una submartingala? `Distinguere eventualmente i casi` $k > 1$ `e` $k < 1$.

`Suggerimento.` Puó essere utile la disuguaglianza di Jensen: Se X è una v.a. $\mathcal{F}$ una filtrazione e φ una funzione convessa allora a patto che X e $\varphi(X)$ siano in L^1 vale la disuguaglianza:

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{F}] \qquad q.c.$$