Primo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
22/01/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, con le seguenti distribuzioni: $X \sim Unif(0,1)$ e $Y \sim Esp(1)$. Siano assegnate inoltre le seguenti v.a.

$$\begin{aligned} &Z = \max(X,Y) \\ &W = \min(X,Y) \\ &T = \tfrac{Y}{X} \end{aligned}$$

(a) Calcolare la probabilità $P(X > Y)$.
(b) Calcolare la funzione di ripartizione delle v.a. Z e W.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. T.
(d) Le v.a. Z, W, T sono assolutamente continue? Se lo sono calcolarne la densità.

Soluzione.
(a) $P(X > Y) = e^{-1}$
(b)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z(1-e^{-z}) & 0 \leq z < 1 \\ 1 - e^{-z} & 1 \leq z \end{cases}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ 1-(1-w)e^{-w} & 0 \leq w < 1 \\ 1 & 1 \leq w \end{cases}$$

(c)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{1-e^{-t}}{t} & 0 \leq t \end{cases}$$

(d)

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1-e^{-z} + ze^{-z} & 0 \leq z < 1 \\ e^{-z} & 1 \leq z \end{cases}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ (2-w)e^{-w} & 0 \leq w < 1 \\ 0 & 1 \leq w \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1-(t+1)e^{-t}}{t^2} & 0 \leq t \end{cases}$$

Esercizio 2.
Costruire, se esiste, un esempio di successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti tali che per ogni n si abbia $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $Var(X_n) = 1$ e posto

$$Y_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

valga:

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} 0$$

Soluzione.
Ci sono tantissimi modi per costruire un esempio. Un'idea è la seguente: cerchiamo delle variabili aleatorie X_n che hanno una probabilità molto grande di essere nulle, ma hanno anche media zero e varianza uno. Per cominciare vogliamo:

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

poi siccome le vogliamo a media nulla allora supponiamo che possano assumere anche due valori opposti a_n e $-a_n$

$$P(X_n = a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad P(X_n = -a_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Le tre probabilità finora definite sommate fanno 1 sono positive e definiscono in maniera univoca la distribuzione di X_n, inoltre la condizione $E[X_n] = 0$ è soddisfatta. A questo punto occorre determinare a_n in modo da soddisfare anche la condizione varianza di X_n uguale a uno.

$$Var(X_n) = E[X_n^2] - (E[X_n])^2 = a_n^2 \cdot \frac{1}{2^n} + 0$$

Quindi con $a_n = 2^{\frac{n}{2}}$ sono soddisfatte tutte le ipotesi del problema. Siano allora $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle variabili aleatorie indipendenti tali che

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad P(X_n = 2^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad P(X_n = -2^{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Poiché:

$$\sum_n P(X_n \neq 0) = \sum_n \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$$

allora posso applicare il lemma di Borell-Cantelli. Per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ vale $X_n(\omega) = 0$ allora per tale ω vale

$$\lim_n Y_n(\omega) = \lim_n \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_{\overline{n}-1}(\omega) + X_{\overline{n}}(\omega) \ldots + X_n(\omega)}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_{\overline{n}-1}(\omega)}{\sqrt{n}} = 0$$

Esercizio 3.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni n sia $\mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$. È vero che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

Soluzione.
Si è vero.

IPOTESI $\forall n$

- X_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile.
- $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.
- $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$

inoltre per costruzione vale: $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$

TESI $\forall n$

1. X_n è $\mathcal{G}_n$ misurabile.
2. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.
3. $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_{n-1}] = X_{n-1}$

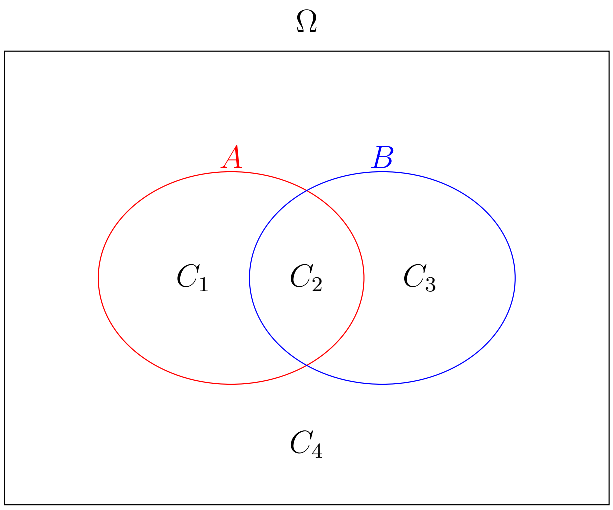
Dimostrazione:
La prima condizione é vera per costruzione. La seconda é vera per ipotesi. Verifichiamo la terza:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{G}_{n-1}] = X_{n-1} \qquad q.c.$$

Dove la prima uguaglianza è un'applicazione della proprietà torre.

Esercizio 4.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Siano A e B due eventi con $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$. Sia infine $\mathcal{G} := \sigma(A, B)$. Data X variabile aleatoria in L^1 e $Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ dimostrare che la variabile aleatorie Y può assumere al più 4 valori distinti.

Soluzione.



Siano $C_1 = A/B$, $C_2 = A \cap B$, $C_3 = B/A$, $C_4 = (A \cup B)^c$ come in figura. Allora $C_1, \ldots, C_4$ sono una partizione di Ω e vale:

$$\mathcal{G} := \sigma(C_1, C_2, C_3, C_4)$$

Si verifica facilmente che gli eventi C_i hanno tutti probabilità positiva e quindi sono non vuoti. Inoltre poiché $C_1, \ldots, C_4$ è una partizione allora gli elementi D di $\mathcal{G}$ sono tutti e soli quelli della forma

$$D = \cup_{i \in J} C_i$$

con $J \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. In particolare $\mathcal{G}$ possiede al più quattro elementi non vuoti disgiunti.
Poiché $Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ allora deve essere $\mathcal{G}$ misurabile. Supponiamo che Y assuma n valori distinti y_1, y_2,...,y_n. Siano $D_i := Y^{-1}(y_i)$. Gli insiemi D_i sono elementi non vuoti e digiunti di $\mathcal{G}$ quindi per quanto detto prima n puó essere al più 4.

Esercizio 5. Giacomo gioca a testa e croce con un amico. Vince una moneta quando esce testa e perde una moneta quando esce croce. All'inizio ha una sola moneta. Decide di continuare a scommettere finché non esce testa per 3 volte di seguito oppure finché non resta con zero monete.
Indichiamo con $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ il numero di monete che possiede Giacomo dopo n scommesse (Cosicché $X_0 \equiv 1$, $X_1 \in \{0, 2\}$,...). Indichiamo con τ l'istante in cui decide di smettere di giocare e con $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione data da: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
(a) Dimostrare che τ è un tempo di arresto.
(b) Dimostrare che $P(\tau < +\infty) = 1$.
(c) Dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(d) Dimostrare che $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.
(e) Quanto vale $\mathbb{E}[X_\tau]$?

Soluzione.
La cosa più importante è la costruzione del modello. Per iniziare consideriamo infiniti lanci di una moneta equilibrata, sia

$$T_i := \begin{cases} +1 & \text{se l'}i\text{-esimo lancio è testa} \\ -1 & \text{se l'}i\text{-esimo lancio è croce} \end{cases}$$

sia per ogni n

$$Y_n := 1 + T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

allora per quanto visto a lezione poiché $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è somma di variabili aleatorie indipendenti a media nulla (tranna la prima) allora è una martingala rispetto alla filtrazione $\mathcal{G}_n := \sigma(T_1, \ldots, T_n)$. Dove stiamo supponendo $Y_0 = 1$ e $\mathcal{G}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Per quanto riguarda τ abbiamo

$$\tau = \inf\{n | Y_n = 0 \text{ oppure } Y_n - Y_{n-3} = 3\}$$

dove per semplicità di notazione abbiamo supposto $Y_{-2} = Y_{-1} = 1$. Vale

$$\{\tau \leq n\} = \cup_{k=1}^{n} \left(\{Y_k = 0\} \cup \{Y_k = Y_{k-3} - 3\}\right)$$

quindi τ è un tempo di arresto rispetto a $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre per quanto detto sopra si ha:

$$X_n := Y_{n\wedge\tau}$$

e quindi essendo una martingala stoppata $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è a sua volta una martingala rispetto a $\mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
(a) Si verifica facilmente che vale

$$\{\tau \leq n\} = \cup_{k=1}^{n} \left(\{X_k = 0\} \cup \{X_k = X_{k-3} - 3\}\right)$$

quindi τ è un tempo di arresto rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) il quesito (d) implica quello (b) dimostreremo solo (d).
(c) In maniera uguale a quanto fatto nell'esercizio 3 si ha che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una

martingala rispetto a $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
(d) Utilizzeremo la disuguaglianza $\mathbb{E}[|Z|] \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(|Z| > k)$.

$$\tau > 3n \qquad \Longrightarrow \qquad Y_{3k} - Y_{3k-3} < 3 \ \forall k \in 1, 2, \ldots, n$$

ho considerato solo le variabili $Y_{3k} - Y_{3k-3}$ con $k \in 1, 2, \ldots, n$ perché le volevo indipendenti. poiché $P(Y_{3k} - Y_{3k-3} < 3) = \frac{7}{8}$ allora si ha:

$$P(\tau > 3n) \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

ovvero

$$P\left(\frac{\tau}{3} > n\right) \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

e quindi

$$\mathbb{E}\left[\frac{\tau}{3}\right] \leq \sum_{k=0}^{\infty} P(\tau > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 8 < \infty$$

(e) Poiché $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ e vale $|X_{n+1} - X_n| \leq 1$ q.c. allora per il teorema opzionale di arresto si deve avere:

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] = 1$$

Esercizio 6*.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $\mathcal{G}$ una σ-algebra inclusa in $\mathcal{F}$. Per ogni n definiamo le nuove variabili aleatorie Y_n nel seguente modo.

$$Y_n := \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$$

È vero che $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Dove $\mathcal{G}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. (`Sugg. Per dimostrare che in generale non è vero occorre trovare un controesempio.`)

Soluzione. Sia $\{T_n\}n \in \mathbb{N}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con $P(T_n = -1) = P(T_n = +1) = 1/2$. Sia

$$X_n = T_1 + \ldots + T_n$$
$$\mathcal{F}_n := \sigma(T_1, \ldots, T_n)$$
$$\mathcal{G} = \sigma(X_2)$$

Il processo $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto ad una filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per un teorema visto a lezione le variabili Y_n essendo $\sigma(X_2)$ misurabili si devono poter scrivere come funzione di X_2. Si verifica che valgono le seguenti cose:

$$\begin{aligned} &Y_0 = 0 \\ &Y_1 = X_2/2 \\ &Y_n = X_2 \qquad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Vediamole una alla volta.

$$Y_0 := \mathbb{E}[X_0|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[0|\mathcal{G}] = 0$$

per $n \geq 2$ invece si ha

$$\begin{aligned} Y_n &= \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_2 + T_3 + \ldots + T_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[T_3|\mathcal{G}] + \ldots + \mathbb{E}[T_n|\mathcal{G}] \\ &= \mathbb{E}[X_2|\sigma(X_2)] + \mathbb{E}[T_3|\sigma(X_2)] + \ldots + \mathbb{E}[T_n|\sigma(X_2)] = X_2 \end{aligned}$$

Il caso più difficile è dimostrare $Y_1 = X_2/2$. Supponiamo per semplicità che le variabili T_n assumano in maniera certa solo i valori $+1$ e -1. La distribuzione di X_2 è la seguente

$$\begin{aligned} &P(X_2 = -2) = P(T_1 = -1, T_2 = -1) = \frac{1}{4} \\ &P(X_2 = 0) = P(T_1 = -1, T_2 = +1) + P(T_1 = +1, T_2 = -1) = \frac{1}{2} \\ &P(X_2 = +2) = P(T_1 = +1, T_2 = +1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1|X_2=-2] &= \mathbb{E}[T_1|\{T_1=-1\}\cap\{T_2=-1\}] = -1 = X_2/2 \\
\mathbb{E}[X_1|X_2=0] &= \mathbb{E}[T_1|(\{T_1=1\}\cap\{T_2=-1\})\cup(\{T_1=-1\}\cap\{T_2=+1\})] = 0 \\
\mathbb{E}[X_1|X_2=+2] &= \mathbb{E}[T_1|\{T_1=+1\}\cap\{T_2=+1\}] = +1 = X_2/2
\end{aligned}$$

A questo punto per concludere la dimostrazione bisogna mostrare che Y_n non é una martingala.

$$\mathbb{E}[Y_2|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[Y_2|\sigma(Y_1)] = \mathbb{E}[X_2|\sigma(X_2/2)] = 2\mathbb{E}[X_2/2|\sigma(X_2/2)] = X_2 = 2Y_1$$