Secondo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
22/02/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, con le seguenti distribuzioni: $X \sim Unif(0,1)$ e $Y \sim Unif(0,2)$. Siano assegnate inoltre le seguenti v.a.

$$S = \min(X, Y)$$
$$T = \max(X, Y)$$

(a) Calcolare il supporto del vettore aleatorio di (S, T).(Il supporto qui è il più piccolo chiuso di misura 1).
(b) Calcolare la funzione di ripartizione e di densità della v.a. S.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione e di densità della v.a. T.
(d) Il vettore aleatorio (S, T), è assolutamente continue? Se si calcolarne la densità, altrimenti dimostrare che non è assolutamente continuo.

Esercizio 2.
Costruire, se esiste, un esempio di successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indipendenti tali che

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $P(X_n > 0) = 1$.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n] = +\infty$
- Per quasi ogni $\omega \in \Omega$ si abbia $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) < \infty$.

Esercizio 3.
Supponiamo di eseguire una successioni di lanci di un dado a sei facce regolare e siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gli esiti dei lanci. (Quindi $X_n \sim Unif(\{1,2,3,4,5,6\})$). È possibile a partire dalle $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definire una viariabile aletoria Y tale che $Y \sim Unif(\{1,2,3,4,5\})$. (`Indicare esplicitamente la funzione` f `tale che` $Y = f((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$)

Esercizio 4.
(a) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una supermartingala positiva. Dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.
(b) Costruire un esempio di submartingala positiva $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che non sia tight.

Esercizio 5. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Unif(-1,1)$. Siano $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ parametri e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia:

$$Y_n := \frac{1^\alpha X_1 + 2^\alpha X_2 + 3^\alpha X_3 + \ldots + n^\alpha X_n}{n^\beta}$$

Indichiamo infine con $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione data da: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
(a) Per quali valori di $(\alpha, \beta) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ il processo $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala?
(b) Calcolare la funzione caratteristica di X_n.
(c) Calcolare la funzione caratteristica di Y_n.
(d) Supporre $\alpha = 1$ e $\beta = 3/2$ cosa si può dire della convergenza in distribuzione di Y_n?
(e) Supporre $\beta = \alpha + 1$ cosa si può dire del seguente $\limsup$? (`sugg. utilizzare la legge 0-1 di Kolmogorov`)

$$T = \limsup_{n\to\infty} Y_n$$

(f) Supporre $\beta > \alpha + 1$ cosa si può dire del seguente lim?

$$\lim_{n\to\infty} Y_n$$

(g)* Supporre $\beta = \alpha + 1/2$. Studiare la convergenza in distribuzione di Y_n.

Esercizio 6. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione $X_n \sim Poisson(\frac{1}{2^n})$. Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione data da: $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Siano infine assegnate le variabili aleatorie:

$$Z_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{j} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Dire se $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala, una sottomartingala o una supermartingala. (con dimostrazione o controesempi.)
(b) Calcolare la funzione caratteristica di X_n e Z_n.
(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità in L^p e quasi certa di $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.