Secondo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
06/06/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA..

Esercizio 1.
Trovare (se esiste) un esempio di 3 variabili aleatorie indipendenti X, Y e Z tali che posto $T := X \cdot Y \cdot Z$ si abbia:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X] = 1 \\
&\mathbb{E}[Y] = 2 \\
&\mathbb{E}[Z] = 3 \\
&\mathbb{E}[T^2] = 100
\end{aligned}$$

Svolgimento

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[X^2 \cdot Y^2 \cdot Z^2] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] \cdot \mathbb{E}[Z^2]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= (\mathbb{E}[X])^2 + Var(X) = 1 + \sigma_X^2 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= (\mathbb{E}[Y])^2 + Var(Y) = 4 + \sigma_Y^2 \\
\mathbb{E}[Z^2] &= (\mathbb{E}[Z])^2 + Var(Z) = 9 + \sigma_Z^2
\end{aligned}$$

Occorre trovare σ_X^2, σ_Y^2 e σ_Z^2 in modo tale che valga:

$$\mathbb{E}[T^2] = (1 + \sigma_X^2)(4 + \sigma_Y^2)(9 + \sigma_Z^2) = 100$$

Per esempio si può prendere $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 0$ e poi ricavare $\sigma_Z^2 = 16$.

Dunque le possibili distribuzioni cercate sono:

$$\begin{aligned}
&X = 1 \qquad q.c. \\
&Y = 2 \qquad q.c. \\
&Z \sim N(3, 16)
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Sia X una variabile aleatoria con la seguente funziona di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{6} & -1 \leq x < +1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x-1}{3} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Sia U una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $(0,1)$. Determinare un'applicazione g tale che posto $Y := g(U)$ si abbia $X \sim Y$.

Soluzione

$$g(y) = \begin{cases} 6y - 1 & 0 < y \leq \frac{1}{3} \\ 3y + 1 & \frac{1}{3} < y \leq \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} < y \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.
Fornire un esempio di martingala $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che posto per ogni n, $Y_n := X_n - X_{n-1}$ allora NON valga l'affermazione "Le variabili aleatorie $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti".
Occorre costruire la martingala $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e poi dimostrare che le $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non sono indipendenti

Soluzione

Gli esempi possibili sono tantissimi. Gli esempi di martingale construite a lezione con i prodotti di variabili aleatorie indipendenti a media 1 dovrebbero andare tutti bene.

Siano $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. con $P(Z_n = 1/2) = 2/3$ e $P(Z_n = 2) = 1/3$ cosicché si abbia $\mathbb{E}[Z_n] = 1$. Siano

$$X_n = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \ldots \cdot Z_n$$

con $S_0 = 1$. Per quanto visto a lezione $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale. Sia ore $Y_n = X_n - X_{n-1}$ allora vale:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = +1 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 2 \\
&Y_1 = -1/2 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 1/2 \\
&Y_2 = +2 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 2 \;\&\; Z_2 = 2 \\
&Y_2 = +1/2 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 1/2 \;\&\; Z_2 = 2 \\
&Y_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 2 \;\&\; Z_2 = 1/2 \\
&Y_2 = -1/4 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = 1/2 \;\&\; Z_2 = 1/2
\end{aligned}$$

allora per esempio vale

$$\begin{aligned}
&P(Y_1 = +1) = 1/3 \\
&P(Y_2 = 1/2) = 2/9 \\
&P(Y_1 = +1, Y_2 = 1/2) = 0
\end{aligned}$$

Dunque non sono indipendenti

Esercizio 4.
N giocatori decidono di fare il seguente gioco, ciascun giocatore lancia una moneta regolare, se esce testa esegue un altro lancio e così via finché non esce croce. (Ovvero ciascun giocatore continua a lanciare finché non realizza croce) Sia X_k il numeri di lanci effettuati dal k-esimo giocatore e sia

$$T_N := \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$$

(a) Qual è la distribuzione di X_k?
(b) Calcolare la funzione di ripartizione $F_{X_k}(n)$ per ogni n intero positivo.
(c) Calcolare la funzione di ripartizione $F_{T_N}(n)$ per ogni n intero positivo.
(d) Calcolare la mediana di T_N.
(e)* Poniamo a_N uguale alla mediana di T_N cosa si può dire del limite $\lim_N \frac{a_N}{\log(N)}$?

Soluzione
(a) $X_k \sim Geom(1/2)$
(b) $F_{X_k}(n) = 1 - \frac{1}{2^n}$
(c) $F_{T_N}(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^N$
(d) Dato N occorre trovare il più piccolo valore di n intero per il quale $F_{T_N}(n) > 1/2$. Poiché la funzione di ripartizione è monotona basta risolvere $F_{T_N}(x) = 1/2$ e poi prendere la parte intera superiore.

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^N = \frac{1}{2}$$

$$2^x = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}}}$$

$$x = \frac{-\log\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}}\right)}{\log(2)}$$

Dunque

$$n = \left\lceil \frac{-\log\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{N}}}\right)}{\log(2)} \right\rceil$$

Esercizio 5*. (`Questo esercizi è libero non occorre studiare tutti i possibili casi di` $\alpha \geq 0$ `e` $\beta \geq 0$ `fate prima i casi più semplici e poi via via quelli più complessi per i quali avete un'idea. Per cominciare per esempio il caso` $\alpha = 0$ `e` $\beta = 1$ `dovrebbe andare bene.`)

Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $X_n \sim Poisson(1)$. Siano $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ parametri e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia:

$$Y_n := \frac{1^\alpha X_1 + 2^\alpha X_2 + 3^\alpha X_3 + \ldots + n^\alpha X_n}{n^\beta}$$

Indichiamo infine con $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione data da: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
(a) Indicare per quali valori di (α, β) la successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione.
(b) Indicare per quali valori di (α, β) la successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità.
(c) Indicare per quali valori di (α, β) la successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente.
(d) Indicare per quali valori di (α, β) la successione $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in L^p.