Prima prova parziale di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
24/10/2016

Esercizio 1.

Costruire tre famiglie di eventi $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = \infty \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} P(B_n) = \infty \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} P(C_n) = \infty$$

tali che posto $A := \limsup_n A_n$, $B := \limsup_n B_n$ e $C := \limsup_n C_n$ si abbia:

- (a) $P(A) = 1$
- (b) $P(B) = \frac{1}{2}$
- (c) $P(C) = 0$

Esercizio 2.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha x & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$

- (a) Calcolare α .
 - (b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y .
 - (c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $COV(X, Y)$.
 - (d) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 1)$.
- Sia $S = X - Y$ e $T = 3Y$.

- (f) Calcolare il supporto e la densità congiunta del vettore (S, T) .
- (g) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?

Esercizio 2.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha y & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$

- (a) Calcolare α .
 - (b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y .
 - (c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $COV(X, Y)$.
 - (d) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 1)$.
- Sia $S = X - Y$ e $T = Y$.

- (f) Calcolare il supporto e la densità congiunta del vettore (S, T) .
- (g) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?