Seconda prova parziale di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
11/12/2017

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità. Consideriamo su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ le seguenti variabili aleatorie: T, $\widetilde{T}$, W, $\widetilde{W}$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X e Y. Supponiamo inoltre che:

$$T = \widetilde{T} \quad q.c. \qquad\qquad W = \widetilde{W} \quad q.c.$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{Prob} X \qquad\qquad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{Prob} Y$$

(a) Dimostrare che se T è indipendente da W allora $\widetilde{T}$ è indipendente da $\widetilde{W}$.
(b) Dimostrare che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indipendente da $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora X è indipendente da Y.

Esercizio 2.

Siano $\{X_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti con coefficienti $p_{n,k}$. Per ogni n, k in $\mathbb{N}$ siano inoltre assegnate le seguenti variabili:

$$T_{n,k} := X_{n,1} + \ldots + X_{n,k}$$

$$S_n := \sum_{kin\mathbb{N}} X_{n,k}$$

supponiamo infine che valgano le seguenti ipotesi:

(i) Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ vale $P(X_{n,k} = 1) < \frac{1}{n}$.

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathbb{E}[S_n] = 1$.

(a) Fissato $n \in \mathbb{N}$ studiare la convergenza di $T_{n,k}$ per k che tende all'infinito.

(b) Cosa si può dire della funzione caratteristica di S_n?

(c)* Facoltativo. Studiare la convergenza in distribuzione di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per n che tende all'infinito

Esercizio 3.
Siano $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie indipendenti con le seguenti distribuzioni:

$$X_n \sim Poisson(n) \qquad\qquad Y_n \sim Unif((0,1))$$

consideriamo le seguenti variabili aleatorie:

$$Z_n := \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}$$

$$T_n := \begin{cases} \frac{Y_1+Y_2+\ldots+Y_n}{X_n} & \text{se } X_n \neq 0 \\ 1 & \text{se } X_n = 0 \end{cases}$$

$$W_n := \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{X_n}}{n}$$

(a) Cosa si può dire della convergenza $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per n che tende all'infinito?
(b) Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to\infty} P(n - n^{\frac{2}{3}} \leq X_n \leq n + n^{\frac{2}{3}})$. (sugg. usare la dis. di Chebyshev)
(c) Studiare la convergenza in distribuzione ed in probabilità di $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Sugg. può essere utile considerare il rapporto $\frac{Z_n}{T_n}$.
(d) Studiare la convergenza in distribuzione ed in probabilità di $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Sugg. può essere utile considerare la differenza $Z_n - W_n$.
(e)* Facoltativo. Studiare la convergenza quasi certa di $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.