

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 1

Misurabilità

David Barbato

Esercizio 1. Dimostrare che se una σ -algebra è finita allora la sua cardinalità è 2^n per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ due σ -algebre. Mostrare che $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è una σ -algebra se e solo se $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ oppure $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2$.

Esercizio 3. Dimostrare che se $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione continua allora è anche misurabile come applicazione da $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ in $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Esercizio 4. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ applicazioni misurabili da uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{H})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dimostrare che sono misurabili le seguenti applicazioni:

1. $\sup_n X_n$
2. $\inf_n X_n$
3. $\limsup_n X_n$
4. $\liminf_n X_n$

dove $\limsup_n X_n := \inf_n \{\sup_{m > n} X_m\} = \lim_n \{\sup_{m > n} X_m\}$
e $\liminf_n X_n := \sup_n \{\inf_{m > n} X_m\} = \lim_n \{\inf_{m > n} X_m\}$

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 := \{ (-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \} \\ \mathcal{A}_2 := \{ (a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \} \\ \mathcal{A}_3 := \{ (a_1, b_1] \cup \dots \cup (a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \overline{\mathbb{R}} \} \end{cases}$$

Dimostrare che:

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$