Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 2
σ-algebra e probabilità

David Barbato

Esercizio 1. *Sia Ω un insieme e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ consideriamo le seguenti ipotesi su $\mathcal{G}$:*

(i) $\Omega \in \mathcal{G}$

(ii) Se $A \in \mathcal{G}$ *allora* $A^c \in \mathcal{G}$

(iii) Se $A_n \in \mathcal{G}$ *e* $A_n \cap A_m = \varnothing$ *per ogni* $n \neq m$ *allora* $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$

(a) $\Omega \in \mathcal{G}$

(b) Se $A, B \in \mathcal{G}$ *e* $A \subseteq B$ *allora* $B/A \in \mathcal{G}$

(c) Se $A_n \in \mathcal{G}$ *e* $A_n \uparrow A$ *allora* $A \in \mathcal{G}$

Dimostrare che le ipotesi (i), (ii) e (iii) implicano le ipotesi (a), (b) e (c) e viceversa le ipotesi (a), (b) e (c) implicano le ipotesi (i), (ii) e (iii).

Esercizio 2. *Sia Ω un insieme con cardinalità pari e maggiore di 2. Consideriamo la seguente collezione di sottoinsiemi di Ω :*

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{P}(\Omega) | \sharp(B) \text{ pari } \}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ è un d-system ma non è una σ-algebra.

Esercizio 3. *Costruire un esempio di spazio di probabilità con tre eventi A, B e C tali che siano a due a due indipendenti ma non siano indipendenti in generale (ovvero $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$).*

Negli esercizi che seguono si utilizzerà la convenzione $A = \lim A_n$ se e solo se $1_A = \lim 1_{A_n}$, ed in maniera analoga per lim sup e lim inf.

Esercizio 4. *Mostrare che se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di eventi allora:*

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n = \cup A_n$$

Esercizio 5. *Mostrare che se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di eventi tali che $\limsup A_n = \liminf A_n$ allora*

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

Esercizio 6. *Data una successione di eventi* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(a) Dimostrare che

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup(A_n)) \qquad (1)$$

(b) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianza della disequazione (1) *sono strette.*

Esercizio 7. *(*) Sia* $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *uno spazio di probabilità e sia* $\mathcal{A}$ *un'algebra tale che* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. *Dimostrare che per ogni* $H \in \mathcal{H}$ *e* $\epsilon > 0$ *esiste* $A \in \mathcal{A}$ *tale che* $P(H \triangle A) < \epsilon$.

Esercizio 8. *Sia* $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ *uno spazio di probabilità e sia* $\mathcal{A}$ *la collezione di eventi:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) \in \{0, 1\}\}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ *è una* σ*-algebra*

Esercizio 9. *Sia* $\mathcal{C}$ *la collezione di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *data da:*

$$\mathcal{C} := \{(-a, a) : a > 0\}$$

e sia $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.
(a) Dimostrare che se A *appartiene ad* $\mathcal{A}$ *allora* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *dove* $-A := \{x : -x \in A\}$.
*(b)** Dimostrare che se* A *è un boreliano e vale* $A = -A$ *allora* A *appartiene ad* $\mathcal{A}$.

Esercizio 10. *Sia* Ω *un insieme più che numerabile e sia* $\mathcal{A}$ *la collezione di sottoinsiemi di* Ω *data da:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega | A \text{ oppure } A^c \text{ è finito o numerabile}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ *è una* σ*-algebra e la seguente funzione* P *è una misura di probabilità su* $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito o numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è finito o numerabile} \end{cases}$$

(b) A cosa serve l'ipotesi Ω *è più che numerabile? Può essere rimossa?*

Esercizio 11. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Mostrare che* f' *è misurabile. (Notare che* f *derivabile non vuol dire che ha derivata continua.)*

Esercizio 12. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie, sia* $\mathcal{T}_n$ *la sigma algebra generata da* $(X_k)_{k\geq n}$ *e sia* $\mathcal{T} = \cap_n \mathcal{T}_n$ *la sigma algebra coda. Dimostrare che:*
(a) $\limsup_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(b) $\liminf_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(c) $\limsup_n \frac{X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(d) $\limsup_n \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(e) Supponiamo ora $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$ *mostrare che* $\limsup_n \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(f) Cosa si può dire di $\limsup_n \max\{X_1, \ldots, X_n\}$*? Costruire un esempio tale che il limite precedente non è* $\mathcal{T}$ *misurabile e vale* $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$.

Esercizio 13. *(***) Sia* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di spazi metrici completi e separabili, sia* $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ *la famiglia delle corrispondenti topologie e supponiamo infine che l'insieme degli indici* I *sia al più numerabile. Dimostrare che posto* $\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i$ *e* $\mathcal{T} = \otimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$ *allora vale*

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(\Omega_i) \tag{2}$$

dove $\mathcal{B}(\Omega)$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i)$ *indicano la* σ*-algebra dei boreliani ovvero* $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{T})$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i) = \sigma(\mathcal{T}_i)$.