

# Esercizi di Calcolo delle Probabilità

## Foglio 5

(Foglio 4 2016-2017)

David Barbato

**Esercizio 1.** Siano  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $X$  variabili aleatorie. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, limitata, strettamente crescente e nulla in zero. Sia infine

$$Y_n = f(X_n - X)$$

- (a) Dimostrare che se  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0$  allora  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{prob.}} X$ .  
(b) Dimostrare che se  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{prob.}} X$  allora  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} 0$ .

**Esercizio 2.** Sia  $(\Omega, \mathcal{H}, P)$  uno spazio di probabilità. Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione positiva e crescente tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . Sia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una famiglia di variabili aleatorie identicamente distribuite con distribuzione data da  $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = \frac{1}{2}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  definiamo le  $\sigma$ -algebre:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) \quad \mathcal{T}_n := \bigvee_{k > n} \mathcal{F}_k \quad \mathcal{T} := \bigcap_n \mathcal{T}_n$$

Siano infine  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Z$  assegnate nel seguente modo:

$$Y_n := X_1 + \dots + X_n$$

$$Z_n := \frac{Y_n}{a_n}$$

$$Z := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n & \text{se il limite esiste (anche eventualmente infinito)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che  $Z$  è  $\mathcal{T}$  misurabile.  
(b) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio e tale che  $P(|Z| = 7) = 1$   
(c) Costruire, se possibile, un modello che soddisfi le ipotesi dell'esercizio tale che le  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  siano indipendenti e  $P(|Z| = +\infty) = 1$

**Esercizio 3.** Siano  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione e  $p$  e  $q$  numeri tali che per ogni  $n$  si abbia  $1 > q > p_n > p > 0$  e valga il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ . Siano  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme su  $(0, 1)$  per ogni  $n$  siano infine assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$\begin{aligned} X_n &:= I_{\{U_n < q\}} & Y_n &:= I_{\{U_n < p_n\}} & Z_n &:= I_{\{U_n < p\}} \\ S_n &:= X_1 + \dots + X_n & T_n &:= Y_1 + \dots + Y_n & W_n &:= Z_1 + \dots + Z_n \end{aligned}$$

(a) Quali sono le distribuzioni di  $X_n$ ,  $Y_n$  e  $Z_n$ ? Calcolare media e varianza di  $S_n$ ,  $T_n$  e  $W_n$ .

(b) Cosa si può dire dei limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{n}$ ?

(c) Dimostrare che vale

$$q \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} \geq p \quad \text{quasi certamente}$$

(d) Dimostrare che la somma  $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$  converge a  $p$  quasi certamente.

**Esercizio 4.** Sia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie indipendenti e assolutamente continue con densità  $f_n$  assegnata:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n^\alpha}{(n^\alpha x + 1)^2} & \text{Se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di ripartizione di  $X_n$ . Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  studiare la convergenza della successione  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in  $L^p$ . Eventualmente considerare la convergenza in  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Considerare separatamente i casi  $\alpha < -1$ ,  $\alpha \in [-1, 0)$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\alpha > 1$ .

**Esercizio 5.** Sia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie i.i.d. assolutamente continue con densità  $f$  assegnata:

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{Se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia inoltre

$$Y_n := n^\alpha \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di  $Y_n$ .

(b) Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  studiare la convergenza in distribuzione di  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .