

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 6

(Foglio 5 2016-2017)

David Barbato

Esercizio 1. Calcolare la funzione caratteristica delle variabili aleatorie assolutamente continue aventi le seguenti densità:

(a) Per ogni $a > 0$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} & x \in [0, a] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-a|}$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}$, sia φ la sua funzione caratteristica. Mostrare che vale

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt$$

Sugg. si mostri dapprima che per ogni j e k interi vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{ijt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Esercizio 3. Siano X e Y due variabile aleatorie indipendenti con distribuzioni: $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Calcolare la funzione caratteristica di X , Y e $X+Y$, dedurre che $X+Y$ è ancora una distribuzione di Poisson.

Esercizio 4. Siano X e Y due variabile aleatorie indipendenti con distribuzioni: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Assumere come nota la funzione caratteristica della normale standard $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Calcolare la funzione caratteristica di X , Y e $X+Y$, dedurre che $X+Y$ è ancora una distribuzione di Normale.

Esercizio 5. Siano X e Y due variabile aleatorie con $X \sim \exp(1)$ e $Y = \frac{X}{\lambda}$ con $\lambda > 0$.

(a) Calcolare la funzione caratteristica di X .

(b) Calcolare le derivate della funzione caratteristica di X e dimostrare che $\mathbb{E}[x^n] = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Calcolare la funzione di ripartizione di Y . La v.a. Y appartiene ad una famiglia di distribuzioni note?

(d) Calcolare i momenti della variabile aleatoria Y .