Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 7

David Barbato

Esercizio 1. *Siano* Y *e* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda = 1$. *Siano inoltre:*

$$W_n := \max\{Y, X_n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \min\{W_0, \ldots, W_n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione di W_n.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p *di* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
(c) La successione T_n *è tight?*

Esercizio 2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, P)$ *uno spazio di probabilità filtrato. Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti adattate alla filtrazione* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Con distribuzione* $X_n \sim Bern(\frac{1}{n})$. *Siano inoltre assegnate le seguenti variabili aleatorie:*

$$S_n := \sum_{k=n+1}^{2n} X_n$$
$$T := \limsup_{n\to\infty} S_n$$
$$W := \liminf_{n\to\infty} S_n$$

(a) Studiare la convergenze di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in* L^p
(b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *A quale distribuzione converge?*
(c) Quali sono le distribuzioni di W *e* T*?*
(d) Cosa si può dire della convergenza in probabilità di S_n*?*

Esercizio 3. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie limitate (esiste* $M > 0$ *tale che per ogni* n *vale* $P(|X_n| < M) = 1$*). Dimostrare che se* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad una variabile aleatoria* X *in probabilità allora converge ad* X *anche in* L^p.

Esercizio 4. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *due successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che le* X_n *abbiamo distribuzione assegnata da* $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ *mentre le* Y_n *siano assolutamente continue con densità:*

$$f_{Y_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t^3}} & t > 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

siano infine assegnate le v.a. $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *da:*

$$Z_n := \max\{X_1Y_1, \dots, X_nY_n\}$$
$$T_n := \frac{Z_n}{n^\alpha}$$

(a) Calcolare la funzione di ripartizione delle variabili aleatorie Z_n*.*
(b) Calcolare $P(X_nY_n > tn^\alpha)$*, al variare di* $\alpha > 0$*.*
(c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p *di* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *al variare di* $\alpha > 0$

Esercizio 5. *Siano* X *e* Y *due variabili aleatorie indipendenti, supponiamo che* X *abbia distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda = 1$ *e* Y *sia una v.a. discreta con distribuzione* $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$*, sia infine* $Z := X \cdot Y$*.*
(a) Calcolare la funzione di densità di Z*.*
(b) Calcolare la funzione caratteristica di Z*.*

Esercizio 6. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni di variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni:* $X_n \sim Poisson(7)$ *e* $Y_n \sim Bern(\frac{1}{n})$ *per ogni* n*. Siano inoltre assegnate le seguenti v.a.*

$$Z_n := X_n \cdot Y_n$$
$$W_n := \max\{Z_1, \dots, Z_n\}$$

(a) La successione di v.a. $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è Tight?*
(b) La successione di v.a. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è Tight?*

Esercizio 7. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = C \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$$

Discutere della converga in distribuzione, in probabilità, in L^p *e quasi certa di* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *per* n *che tende all'infinito. Fornire una dimostrazione quando si è certi della convergenza e trovare un controesempio negli altri casi.*

Esercizio 8. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* X *variabili aleatorie a valori in* Z. *Dimostrare le seguenti implicazioni*
(a) Se $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{distr.} X$ *allora per ogni* $k \in \mathbb{Z}$ *si ha* $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$.
(b) Se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ *si ha* $P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X = k)$ *allora* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{distr.} X$.

Esercizio 9. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo* $(0,1)$. *Siano inoltre assegnate per ogni* n *le seguenti variabili aleatorie:*

$$Y_n := X_n + X_{n+1} \qquad e \qquad Z_n := \frac{X_{n+1} + \ldots + X_{2n}}{n}$$

(a) Posto $S_n := \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}$ *si Studi la convergenza di* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in* L^p.
(b) Studiare la convergenza di Z_n *in distribuzione, in probabilità e quasi certa.*

Esercizio 10. *Sia* $I := \{(n,j) | n,j \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le n\}$. *Costruire un esempio di famiglia di varibili aleatorie indipendenti* $\{X_{n,j}\}_{(n,j)\in I}$ *a valori nei numeri interi non negativi tali che:*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}] = 1$
2. $\lim_{n\to\infty} \sup\{P(X_{n,1} \ge 1), \ldots, P(X_{n,n} \ge 1)\} = 0$
3. *Posto* $S_n := X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ *si abbia che* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *non converge in distribuzione ad una variabile aleatoria poissoniana.*

Esercizio 11. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *variabili aleatorie congiuntamente indipendenti con distribuzione* $X_n \sim Y_n \sim Unif(0,1)$, $Z_n \sim Bern(\frac{1}{2})$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Siano inoltre per ogni* $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

$$T_n := \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$$

$$R_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$$

$$Q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - Z_k)}{n}$$

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k W_k + (1 - Z_k) T_k$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione, probabilità, quasi certa ed in L^p *di* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, probabilità, quasi certa ed in L^p *di* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Calcolare $P(W_n > \frac{1}{n})$.
(d) Dimostrare che: $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[nW_n] > 0$.
(e) Quanto vale: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R_n]$*?*
(f) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(g) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 12. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione geometrica* $X_n \sim Geo(1/n)$. *Consideriamo inoltre per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *le seguenti variabili:*

$$\begin{aligned} Y_n &:= \tfrac{X_n}{n} \\ T_n &:= \min\{X_1, \ldots, X_n\} \\ W_n &:= \max\{X_1, \ldots, X_n\} \\ Z_n &:= \tfrac{W_n}{n} \end{aligned}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p *di* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} W_n = +\infty$ *quasi certamente.*
(d) Assegnato $\Gamma > 0$, *quanto vale il limite* $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{\frac{n}{2}}}{n} > \Gamma\right)$*? (Limite sugli n pari.)*
(e) Studiare la convergenza di* $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 13. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *successioni di variabili aleatorie indipendenti con:*

$$X_n \sim Poisson(n) \qquad\qquad Y_n \sim Unif(0, n)$$

Sia $Z_n := \frac{X_n}{Y_n}$
(a) Dimostrare che se* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *convergono in distribuzione rispettivamente alle v.a.* T *e* W *allora* $\{T_nW_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge in distribuzione a* TW. *(Questo quesito è facoltativo e può essere utilizzato per completare l'esercizio.)*
(b) Calcolare la funzione di densità della variabile aleatoria $S_n := \frac{n}{Y_n}$.
(c) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Indicare l'eventuale distribuzione limite.*

SOLUZIONI

Esercizio 2

(a)

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \end{cases}$$

Quindi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{distr} 0$ e poiché converge in distribuzione ad una costante allora vale anche $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{prob} 0$.

Se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente deve convergere quasi certamente a zero. Sia $\epsilon \in (0,1)$ allora $P(|X - 0| > \epsilon) = \frac{1}{n}$. Poiché sono indipendenti e $\sum_n P(|X - 0| > \epsilon) = \infty$ allora per il lemma di Borel-Cantelli si ha che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere quasi certamente a zero.

Per quanto riguarda la convergenza in L^p la cosa più semplice da fare è calcolare esplicitamente il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - 0\|_{L^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

dunque $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in L^p per ogni p.

(b) Osserviamo innanzitutto che vale:

$$\begin{aligned} S_1 &= X_2 \\ S_2 &= X_3 + X_4 \\ S_3 &= X_4 + X_5 + X_6 \\ S_4 &= X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \end{aligned}$$

Allo scopo di utilizzare la legge dei piccoli numeri effettuiamo il seguente cambio di notazione:

$$Y_{n,j} := X_{n+j} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi avremmo che per ogni n le v.a. $\{Y_{n,j}\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$ sono indipendenti ed hanno distribuzione $Y_{n,j} \sim Bern\left(\frac{1}{n+j}\right)$. Con le nuove notazioni si ha:

$$\begin{aligned}
&S_1 = Y_{1,1}\\
&S_2 = Y_{2,1} + Y_{2,2}\\
&S_3 = Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3}\\
&\dots\dots\\
&S_n = Y_{n,1} + \dots\dots + Y_{n,n}
\end{aligned}$$

Le ipotesi per applicare la legge dei piccoli numeri si verificano tutte banalmente ad eccezione del limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1)$$

dobbiamo stimare le seguenti somme:

$$\sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

stimiamo le somme con l'integrale di $1/x$ come segue

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{x} dx$$

integriamo

$$\log\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \leq \log(2)$$

e infine passiamo al limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(Y_{n,j} \geq 1) = \log(2)$$

Quindi $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in distribuzione ad una poissoniana di parametro $\lambda := \log(2)$

(c) Consideriamo la sottosuccesione $\{S_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $n_k := 2^k$. Per costruzione si tratta di una successione di v.a indipendenti che converge in distribuzione ad una v.a. S poissoniana. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_k P(S_{n_k} = m) = P(S = m) > 0$$

Sommando in k si ottiene:

$$\sum_k P(S_{n_k} = m) = \infty$$

quindi per il lemma di borel cantelli si ha che per ogni m l'evento $S_{n_k} = m$ si verifica quasi certamente per infiniti $k \in \mathbb{N}$. Per cui si ottiene

$$W = \liminf_n S_n = 0 \qquad q.c.$$
$$T = \limsup_n S_n = +\infty \qquad q.c.$$

(d) Supponiamo per assurdo che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga in probabilità ad una v.a. S. Possiamo allora estrarre una sottosuccessione $\{S_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge quasi certamente a S. Consideriamo la sottosottosuccesione:

$$T_k := S_{n_{2^k}} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti e con argomento analogo a quello usato nel quesito (c) si ha: $\liminf_k T_k = 0$ $q.c.$ e $\limsup_k T_k = +\infty$ $q.c.$ questo contraddice l'ipotesi che $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente.

Esercizio 12

Le v.a. X_n sono a valori interi positivi e per ogni k intero positivo vale:

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \qquad P(X_n > k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k}$$

(a) Calcoliamo la funzione di ripartizione delle v.a. Y_n. Per ogni $t > 0$ vale:

$$P(Y_n \leq t) = P(X_n \leq nt) = 1 - P(X_n > nt) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq t) = 1 - e^t$$

dunque le v.a. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono in distribuzione ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1.
(b) La successione $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è positiva e non crescente quindi sicuramente converge. T_n non può assumere valori minori di 1 inoltre vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Per il secondo lemma di Borell Cantelli allora per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n(\omega) = 1$ dunque $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge quasi certamente ad 1.
(c) La successione $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona quindi quasi certamente converge ad una v.a. W in $\overline{\mathbb{R}}$. Occorre mostrare che $W = +\infty$ quasi certamente. Per l'unicità del limite sarà sufficiente mostrare che $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $+\infty$ in probabilità. Dato $M > 0$

$$P(W_n > M) \geq P(X_n > M) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor M \rfloor} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

In realtà con le disuguaglinze di sopra abbiamo mostrato anche qualcosa in più. Abbiamo mostrato che W_n è maggiore di X_n e che X_n converge in probabilità a $+\infty$.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{\frac{n}{2}}}{n} > \Gamma\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\frac{X_m}{2m} > \Gamma\right) = \lim_{m\to\infty} 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\lfloor 2m\Gamma \rfloor} \xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-2\Gamma}$$

(e) Questo quesito è simile al quesito (c) dell'esercizio 5 del foglio 4.

Esercizio 13

$$\mathbb{E}[X_n] = VAR(X_n) = n$$

(b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di S_n

$$P(S_n \leq t) = P\left(\frac{n}{Y_n} \leq t\right) = P\left(Y_n \geq \frac{n}{t}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t} & 1 \leq t \end{cases}$$

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & 1 \leq t \end{cases}$$

(c)

$$Z_n = \frac{X_n}{Y_n} = \frac{X_n}{n} \cdot \frac{n}{Y_n}$$

sappiamo che la distribuzione di $\frac{n}{Y_n} = S_n$ non dipende da n quindi converge in distribuzione, per la parte (a) è sufficiente studiare la convergenza in distribuzione di $\frac{X_n}{n}$. Sappiamo che:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = 1 \qquad VAR\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

allora in maniera analoga a quanto fatto nell'esercizio 7 si ha $\frac{X_n}{n}$ converge in distribuzione ad 1. Quindi Z_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria Z con densità

$$\mathrm{f}_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & 1 \leq t \end{cases}$$