Primo appello di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
01/02/2019

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Costruire, se esiste, un esempio con le seguenti proprietà

1. $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione
2. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ supermartingala
3. $P(X_{n+1} > X_n) > P(X_n > X_{n+1}) > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Svolgimento
Ci sono tantissimi modi per costruire l'esempio richiesto.
Un'idea può essere quella di costruire la supermartingala come somma di variabili aleatorie indipendenti a media non positiva. Siano:

$$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ variabili aleatorie i.i.d.}$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$X_n := Y_1 + \dots + Y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La proprietà $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione è soddisfatta per costruzione. Mentre la seconda e la terza proprietà diventano:

$$\mathbb{E}[Y_n] \leq 0$$

$$P(Y_n > 0) > P(Y_n < 0) > 0$$

Una possibile distribuzione delle v.a. Y_n che soddisfa le proprietà precedenti è $P(Y_n = 1) = \frac{2}{3}$ e $P(Y_n = -10) = \frac{1}{3}$ con $\mathbb{E}[Y_n] = -\frac{8}{3}$

Esercizio 2.
Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità
Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione con $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{H}$ per ogni n.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala rispetto ad $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Sia $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) = 0 \text{ oppure } P(A) = 1\}$.
Sia $\mathcal{G}_n := \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{F}_n\}$ per ogni n.
Sia infine $\mathcal{H}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ per ogni n.

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ-algebre.
(b) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $A \in \mathcal{G}_n$ esiste $B \in \mathcal{F}_n$ tale che $P(A\Delta B) = 0$.
(c) Dimostrare che $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una filtrazione.
(d) Dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto ad $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
(e) Dimostrare che $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto ad $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Svolgimento
(a) Occorre mostrare tre cose

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}$ per ogni n implica $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$

$P(\emptyset) = 0$ implica $\emptyset \in \mathcal{A}$

$$A \in \mathcal{A} \text{ implica } \begin{cases} \text{o} & P(A) = 0 \implies P(A^c) = 1 \\ \text{oppure} & P(A) = 1 \implies P(A^c) = 0 \end{cases} \implies \quad A^c \in \mathcal{A}$$

$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \implies$
$$\implies \begin{cases} \text{o} & \forall n\ P(A_n) = 0 \implies P(\cup_n A_n) = 0 \\ \text{oppure} & \exists \overline{n}\ P(A_{\overline{n}}) = 1 \implies P(\cup_n A_n) = 1 \end{cases} \implies \cup_n A \in \mathcal{A}$$

(b) Sia n fissato. Poiché $\mathcal{G}_n := \sigma\{\mathcal{A}, \mathcal{F}_n\}$ sarà sufficiente dimostrare che la famiglia di eventi che soddisfano la proprietà richiesta contiene $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{F}_n$ ed è una σ-algebra.

$$\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{G}_n | \exists B \in \mathcal{F}_n\ t.c.\ P(A\Delta B) = 0\}$$

- $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{F}_n$: ovvio.
- $\mathcal{B}$ contiene $\mathcal{A}$:
$$A \in \mathcal{A} \implies \begin{cases} \text{o} & P(A) = 0 & \text{allora con } B = \emptyset \text{ si ha } P(A\Delta B) = 0 \\ \text{oppure} & P(A) = 1 & \text{allora con } B = \Omega \text{ si ha } P(A\Delta B) = 0 \end{cases}$$

- $\mathcal{B}$ è una σ-algebra:

  (i) $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

  (ii) Sia $A \in \mathcal{A}$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $P(A\Delta B) = 0$
  $B^c \in \mathcal{B}$, poiché $(A^c \Delta B^c) = A\Delta B$ allora $P(A^c\Delta B^c) = 0$ dunque $A^c \in \mathcal{B}$

  (iii) Sia $A_n \in \mathcal{B}$ allora esiste $B_n \in \mathcal{F}_n$ con $P(A_n \Delta B_n) = 0$
  posto $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ si ha $A\Delta B \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \Delta B_n)$
  quindi per la subadditività $P(A\Delta B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n\Delta B_n) = 0$

(c) Poiché $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ allora $\mathcal{G}_{n+1}$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{F}_n$ e $\mathcal{A}$ quindi $\mathcal{G}_{n+1} \supset \mathcal{G}_n$

(d)

- $\mathcal{G}_n \supseteq \mathcal{F}_n \quad \Longrightarrow \quad X_n$ è $\mathcal{G}_n$ misurabile.
- $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ perché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Occorre mostrare che $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] = X_n$

  Metodo 1: $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}|\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{A})]$. Poiché gli elementi di $\mathcal{A}$ hanno probabilità 0 o 1, allora sono indipendenti da qualunque altro evento dunque $\mathcal{A}$ è indipendente da $\sigma(\mathcal{G}_n, X_{n+1})$ allora per un risultato visto a lezione vale: $\mathbb{E}[X_{n+1}|\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{A})] = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$

  Metodo 2: dimostreremo che $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] = X_n$ applicando la definizione di speranza condizionale.

  - X_n è $\mathcal{F}_n$ misurabile ed in L^1 perché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
  - per ogni $A \in \mathcal{G}_n$ esiste $B \in \mathcal{F}_n$ tale che $P(A\Delta B) = 0$ allora vale: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B X_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_n]$

(e)

- X_n è $\mathcal{H}_n$ misurabile per costruzione.
- $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ perché $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{H}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{H}_n] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{H}_n] = X_n$

Esercizio 3.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di variabili aleatorie indipendenti su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. Assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\omega \in \Omega$ si abbia $X_n(\omega) \in (n, 2n)$ con distribuzione $X_n \sim Unif(n, 2n)$. Sia $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtrazione naturale definita da: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Definiamo infine le seguenti variabili aleatorie:

$$\begin{cases} \tau_1 := \inf\{n \in \mathbb{N} | X_n \in [10, 20]\} \\ \tau_2 := \sup\{n \in \mathbb{N} | X_n \in [10, 20]\} \\ \tau_3 := \inf\{n \in \mathbb{N} | X_{n+1} \in [10, 20]\} \\ \tau_4 := \sup\{n > 10 | X_{n-10} \in [10, 20]\} \end{cases}$$

(a) τ_1 è un tempo di arresto?
(b) τ_2 è un tempo di arresto?
(c) τ_3 è un tempo di arresto?
(d) τ_4 è un tempo di arresto?

Svolgimento
Innanzitutto osserviamo che:

$$\begin{array}{rll} & X_{10}(\omega) \in [10, 20] & \forall \omega \in \Omega \\ \forall n \leq 5 & X_n(\omega) \notin [10, 20] & \forall \omega \in \Omega \\ \forall n \geq 20 & X_n(\omega) \notin [10, 20] & \forall \omega \in \Omega \\ \forall n \in \{6, \ldots, 9, 11, \ldots, 19\} & P(X_n(\omega) \in [10, 20]) \in (0, 1) & \end{array}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{array}{ll} \tau_1(\omega) \in \{6, \ldots, 10\} & \forall \omega \in \Omega \\ \tau_2(\omega) \in \{10, \ldots, 19\} & \forall \omega \in \Omega \\ \tau_3(\omega) \in \{5, \ldots, 9\} & \forall \omega \in \Omega \\ \tau_4(\omega) \in \{20, \ldots, 29\} & \forall \omega \in \Omega \end{array}$$

(a) τ_1 è un tempo di arresto infatti:
$\{\tau_1 = n\} = \{X_1 \notin [10, 20]\} \cap \ldots \cap X_{n-1} \notin [10, 20]\} \cap \{X_n \in [10, 20]\} \in \mathcal{F}_n$

(b) τ_2 non è un tempo di arresto infatti:
$\{\tau_2 = 10\} = \{X_{11} \notin [10, 20]\} \cap \ldots \cap \{X_{19} \notin [10, 20]\}$
dunque $\{\tau_2 = 10\} \in \sigma\{X_{11}, \ldots, X_{19}\}$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_10$ e vale $P(\tau_2 = 10) \in (0, 1)$. $\{\tau_2 = 10\}$ non può appartenere a $\mathcal{F}_{10}$ perché se per assurdo appartenesse a $\mathcal{F}_{10}$ allora sarebbe indipendente da se stesso e dovrebbe avere probabilità 0 o 1.

(c) τ_3 non è un tempo di arresto infatti:
$\{\tau_3 = 5\} = \{X_6 \in [10, 20]\} \in \sigma(X_6)$. Dunque l'evento $\{\tau_3 = 5\}$ è indipendente da $\mathcal{F}_5$ e vale $P(\tau_3 = 5) \in (0, 1)$. Se per assurdo $\{\tau_3 = 5\}$ appartenesse $\mathcal{F}_5$ allora sarebbe indipendente da se stesso e dovrebbe avere probabilità 0 o 1 mentre sappiamo che $P(\tau_3 = 5) \in (0, 1)$.

(d) τ_4 è un tempo di arresto infatti:
La variabile τ_4 può essere determinata dalle variabili $X_{11}, \dots, X_{19}$ quindi τ_4 è $\mathcal{F}_{19}$ misurabili.
Per $n \leq 19$ vale $\{\tau_4 = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$
Per $n > 19$ poiché τ_4 è $\mathcal{F}_{19}$ allora $\{\tau_4 = n\} \in \mathcal{F}_{19} \subseteq \mathcal{F}_n$

Esercizio 4.
Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una famiglia di variabili aleatorie indipendenti a valori in $\{-1,+1\}$ (ovvero: $\forall\omega\in\Omega\ \ X_n(\omega)\in\{-1,+1\}$). Per ogni $n\geq 1$ assumiamo le seguenti ipotesi e definizioni:

$$P(X_n=-1)=\frac{1}{2n^2}\qquad P(X_n=+1)=1-\frac{1}{2n^2}$$

$$Y_n := X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1,\ldots,X_n)$$

$$\forall\omega\in\Omega\qquad T(\omega) := \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega) & \text{se il limite esiste}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$Z_n := \mathbb{E}[T|\mathcal{F}_n]$$

(a) Dimostrare che per ogni $n\in\mathbb{N}$ la σ-algebra $\mathcal{F}_n$ ha esattamente 2^{2^n} elementi.
(b) Dimostrare che l'unico evento di $\mathcal{F}_n$ con probabilità zero è l'insieme vuoto.
(c) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
(d) $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?
(e) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(f) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(g) Scrivere la dimostrazione che $\{\mathcal{Z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala.
(h) Dimostrare che per ogni n esiste una funzione $f_n:\{-1,+1\}\to\mathbb{R}$ tale che $Z_n=f_n(Y_n)$.

Esercizio 5.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo. Con supporto sull'insieme D

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < 1 - x^2\}$$

e funzione di densità $f_{(X,Y)}$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha|x| & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano inoltre assegnate le v.a. $S := \frac{X}{\sqrt{1-Y}}$ e $T = Y$.

(a) Calcolare α.
(b) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria X.
(c) Calcolare funzione di densità e di ripartizione della variabili aleatoria Y.
(d) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{1-X^2}\right]$
(e) Determinare il supporto del vettore aleatorio (S, T).
(f) Calcolare la densità $f_{(S,T)}$ del vettore aleatorio (S, T)
(g) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti. Giustificare la risposta.