

Prima prova parziale di
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
12/12/2018

COGNOME e NOME

N. MATRICOLA.....

Esercizio 1.

Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti supponiamo inoltre:

$$X_n \sim \text{Geom} \left(p = \frac{1}{3} \right)$$

$$Y_n := X_n - X_{n+1}$$

$$Z_n := \prod_{k=1}^n Y_k$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di Z_n per n che tende all'infinito.

(Per la distribuzione geometrica vale $P(X_n = k) = p(1-p)^{k-1}$ per ogni $k \geq 1$ intero)

Svolgimento

Osserviamo prima di tutto che la probabilità che Y_n sia uguale a zero è positiva e non dipende da n :

$$P(Y_n = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k, X_{n+1} = k) > P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = p^2 > 0$$

Volendo la probabilità $P(Y_n = 0)$ si può anche calcolare in maniera esatta (ma non è necessario):

$$\begin{aligned} P(Y_n = 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k, X_{n+1} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} = \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^k = \frac{p}{2-p} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Le variabili $\{Y_n\}_{n \text{ pari}}$ sono indipendenti e vale $\sum_{n \text{ pari}} P(Y_n = 0) = \infty$ quindi per il secondo lemma di Borel Cantelli per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esiste $\bar{n}$ tale che $Y_{\bar{n}}(\omega) = 0$ quindi per ogni $n \geq \bar{n}$ vale $Z_n(\omega) = 0$ quindi $\lim_n Z_n(\omega) = 0$. In conclusione allora vale:

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} 0$$

Esercizio 2.

Siano $\{X_n\}_{n \geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo:

$$X_n \sim \text{Esp}(\lambda_n) \quad P(Y_n = -1) = P(Y_n = +1) = \frac{1}{2}$$

$$Z_n := X_n \cdot Y_n$$

$$T_n := \sum_{k=n}^{n^2} Z_k$$

con $\lambda_n^2 = n \log n$

- (a) Calcolare media e varianza di Z_n .
- (b) Calcolare media e varianza di T_n e il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n)$.
- (c) Calcolare le funzioni caratteristiche di Z_n e T_n . (Per T_n basta la produttoria)
- (d)* La successione T_n converge in distribuzione? Se sì, a quale distribuzione converge.

Suggerimenti utili:

(Se $S \sim \text{Esp}(\lambda)$ allora $\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}[S] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\varphi_S(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$)

($\int \frac{1}{x \log x} dx = \log(\log(x)) + c$)

($\frac{1}{1+x} = 1 - x - o(x)$), $\log(\frac{1}{1+x}) = -x + o(x)$)

(Se $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $\varphi_S(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$)

Svolgimento

$$(a) \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X_n Y_n] = \mathbb{E}[X_n] \mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{\lambda_n} \cdot 0 = 0$$

$$\text{VAR}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_n^2] - (\mathbb{E}[Z_n])^2 = \mathbb{E}[X_n^2] \mathbb{E}[Y_n^2] - 0 = (\text{VAR}[X_n] + (\mathbb{E}[X_n])^2) \cdot 1$$

$$\text{VAR}[Z_n] = \frac{2}{\lambda_n^2} = \frac{2}{n \log(n)}$$

$$(b) \mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=n}^{n^2} \mathbb{E}[Z_k] = 0$$

$$\text{VAR}[T_n] = \sum_{k=n}^{n^2} \text{VAR}[Z_k]$$

$$\text{VAR}[T_n] = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{2}{\lambda_k^2} = \sum_{k=n}^{n^2} \frac{2}{k \log(k)}$$

Per calcolare il limite possiamo stimare la somma con l'integrale:

$$\int_n^{n^2+1} \frac{2}{x \log(x)} dx \leq \text{VAR}[T_n] \leq \int_{n-1}^{n^2} \frac{2}{x \log(x)} dx \quad (1)$$

L'integrale tra n e n^2 si calcola facilmente:

$$\int_n^{n^2} \frac{2}{x \log(x)} dx = 2 (\log(2) + \log(\log(n)) - \log(\log(n))) = 2 \log(2)$$

La disequazione (1) diventa:

$$2\log(2) + \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{2}{x \log(x)} dx \leq VAR[T_n] \leq 2\log(2) + \int_{n-1}^n \frac{2}{x \log(x)} dx$$

I due integrale nell'equazione precedente tendono evidentemente a zero e dunque per il teorema dei due carabinieri si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} VAR[T_n] = 2\log(2)$$

(c)

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E}[e^{itX_n Y_n}] = \mathbb{E}[I_{Y_n=1} e^{itX_n Y_n} + I_{Y_n=-1} e^{itX_n Y_n}] = \\ &= \mathbb{E}[I_{Y_n=1} e^{itX_n} + I_{Y_n=-1} e^{-itX_n}] = \mathbb{E}[I_{Y_n=1}] \mathbb{E}[e^{itX_n}] + \mathbb{E}[I_{Y_n=-1}] \mathbb{E}[e^{-itX_n}] = \\ &= \frac{1}{2} \varphi_{X_n}(t) + \frac{1}{2} \varphi_{X_n}(-t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + it} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \right) \\ &= \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 + t^2} = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n \log(n)}} \end{aligned}$$

$$\varphi_{T_n}(t) = \prod_{k=n}^{n^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{k \log(k)}} \right)$$

(d) Vogliamo utilizzare il teorema di Lévy. Occorre calcolare il limite $\lim \varphi_{T_n}(t)$. Sia $t \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{T_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{n^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{k \log(k)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=n}^{n^2} \log \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{k \log(k)}} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^{n^2} \frac{t^2}{k \log(k)} + o\left(\frac{t^2}{k \log(k)}\right)} = e^{-t^2 \log(2)} \end{aligned}$$

nell'ultima uguaglianza è stato utilizzato $\lim_n \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k \log(k)} = \log(2)$ ottenuto in maniera analoga a quanto fatto nella parte finale del quesito (b). (La funzione o detta "o piccola" utilizzato nell'ultima equazione precedente è una funzione tale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ ed è la stessa funzione in tutti gli addendi della sommatoria.)

Esercizio 3.

Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti supponiamo inoltre:

$$X_n \sim \text{Geom} \left(p = \frac{1}{3} \right)$$

$$Z_n := \prod_{k=1}^n X_k$$

$$T_n := \sqrt[n]{Z_n}$$

(a) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di T_n per n che tende all'infinito.

(Sugg: per $\alpha \in (0, 1)$ vale $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \log(k) = C_\alpha < \infty$)

Svolgimento

$$T_n = (X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{n}} = e^{\log(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n)^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\log(X_1) + \log(X_2) + \dots + \log(X_n)}{n}}$$

Sia $Y_n := \log(X_n)$ e $W_n := \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$ cosicch è:

$$T_n = e^{\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}} = e^{W_n}$$

Le variabili $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono i.i.d. e vale

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[\log(X_n)] = \sum_{k \geq 1} \log(k) p (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} C_{1-p} < \infty$$

Per la legge forte dei grandi numeri allora vale

$$W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \frac{p C_{1-p}}{1-p}$$

infine poiché l'esponenziale è una funzione continua allora vale:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} e^{\frac{p C_{1-p}}{1-p}}$$