Prova di allenamento
Calcolo delle probabilità
Laurea Triennale in Matematica
05/11/2018

COGNOME e NOME ....

N. MATRICOLA...

Esercizio 1.
Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ il seguente spazio di probabilità, $\Omega := (0,1)$, $\mathcal{H} := \mathcal{B}((0,1))$ e P misura di Lebesgue. Definire su $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ due variabili aleatorie indipendenti X e Y tali che $X \sim Bern\left(\frac{2}{3}\right)$ e $Y \sim Bern\left(\frac{1}{4}\right)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se} \\ & \\ 0 & \text{se} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se} \\ & \\ 0 & \text{se} \end{cases}$$

Esercizio 2.
Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha xy & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y < 0, \ x^2 + y^2 < 1 \ \}$
(a) Calcolare α.
(b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y.
(c) Calcolare $\mathbb{E}[\frac{Y^2}{X}]$.
(d) Calcolare $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 > \frac{1}{4})$.
Sia $S = \sqrt{X^2 + Y^2}$ e $T = 1/X$.
(e) Calcolare il supporto e la densità congiunta del vettore (S, T).
(f) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?