Esercizi di Calcolo delle Probabilità
Foglio 2
σ-algebra e probabilità

David Barbato

Esercizio 1. *Costruire un esempio di spazio di probabilità con tre eventi A, B e C tali che siano a due a due indipendenti ma non siano indipendenti in generale (ovvero $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$).*

Negli esercizi che seguono si utilizzerà la convenzione $A = \lim A_n$ se e solo se $1_A = \lim 1_{A_n}$, ed in maniera analoga per $\limsup$ e $\liminf$.

Esercizio 2. *Mostrare che se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di eventi tali che $\limsup A_n = \liminf A_n$ allora*

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$$

Esercizio 3. *Data una successione di eventi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$*
(a) Dimostrare che

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup(A_n)) \qquad (1)$$

(b) Trovare un esempio in cui tutte e tre le disuguaglianza della disequazione (1) sono strette.

Esercizio 4. *(*) Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ un'algebra tale che $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Dimostrare che per ogni $H \in \mathcal{H}$ e $\epsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $P(H \bigtriangleup A) < \epsilon$.*

Esercizio 5. *Sia $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{A}$ la collezione di eventi:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{H} | P(A) \in \{0, 1\}\}$$

dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra

Esercizio 6. *Sia Ω un insieme più che numerabile e sia $\mathcal{A}$ la collezione di sottoinsiemi di Ω data da:*

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega | A \text{ oppure } A^c \text{ è finito o numerabile}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra e la seguente funzione P è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è finito o numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è finito o numerabile} \end{cases}$$

(b) A cosa serve l'ipotesi Ω è più che numerabile? Può essere rimossa?

Esercizio 7. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in ogni* $x \in \mathbb{R}$*. Mostrare che* f' *è misurabile. (Notare che* f *derivabile non vuol dire che ha derivata continua.)*

Esercizio 8. *Sia* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie, sia* $\mathcal{T}_n$ *la sigma algebra generata da* $(X_k)_{k\geq n}$ *e sia* $\mathcal{T} = \cap_n \mathcal{T}_n$ *la sigma algebra coda. Dimostrare che:*
(a) $\limsup_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(b) $\liminf_n X_n$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(c) $\limsup_n \frac{X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(d) $\limsup_n \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(e) Supponiamo ora $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$ *mostrare che* $\limsup_n \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n}$ *è* $\mathcal{T}$ *misurabile.*
(f) Cosa si può dire di $\limsup_n \max\{X_1, \ldots, X_n\}$*? Costruire un esempio tale che il limite precedente non è* $\mathcal{T}$ *misurabile e vale* $X_n(\omega) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega \in \Omega$*.*

Esercizio 9. *(***) Sia* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di spazi metrici completi e separabili, sia* $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ *la famiglia delle corrispondenti topologie e supponiamo infine che l'insieme degli indici* I *sia al più numerabile. Dimostrare che posto* $\Omega = \times_{i\in I} \Omega_i$ *e* $\mathcal{T} = \otimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$ *allora vale*

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(\Omega_i) \tag{2}$$

dove $\mathcal{B}(\Omega)$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i)$ *indicano la* σ*-algebra dei boreliani ovvero* $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{T})$ *e* $\mathcal{B}(\Omega_i) = \sigma(\mathcal{T}_i)$*.*