

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 3

David Barbato

Esercizio 1. (36-ese-2010 s)

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha y & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| < 1, |y - 2| < 2\}$

(a) Calcolare α .

(b) Calcolare le funzioni di densità e le funzioni di ripartizione delle variabili marginali X e Y .

(c) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 1)$ e $\mathbb{P}(X + Y > 1 | Y < 1)$.

(d) Calcolare la funzione di ripartizione del vettore (X, Y) .

Sia $S = X + Y$ e $T = Y$.

(e) Calcolare la densità congiunta del vettore (S, T) .

(f) Le variabili X e Y sono indipendenti? Le variabili S e T sono indipendenti?

Esercizio 2. (39-ese-2010 s)

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha(2x^2y + 1) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y - 1| < 1\}$.

(a) Calcolare α .

(b) Calcolare la funzione di ripartizione e la densità delle variabili marginali X e Y .

(c) Calcolare la covarianza $\text{cov}(X, Y)$.

(d) Sia $S = \frac{X}{Y}$ e sia $T = Y$. Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T) .

Esercizio 3. (02-04-2011 s)

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \alpha e^{-(x^2 + y^2 + xy)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$$

Sia $S = X + Y$ e sia $T = X - Y$.

(a) Calcolare la densità congiunta del vettore (S, T) .

- (b) Calcolare la funzione di densità f_S . (Può essere utile l'uguaglianza: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.)
- (c) Calcolare la funzione di densità f_T .
- (d) Quanto vale α ?
- (e) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti?
- (f) Quali sono le distribuzioni di S e T ? (Indicare solo i nome delle distribuzioni e i loro parametri.)
- (g) Qual è la distribuzione di X ? (Esprimere X in funzione di S e T)

Esercizio 4.

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che Y abbia distribuzione uniforme $Y \sim \text{Unif}(0, \frac{\pi}{2})$, mentre X sia assolutamente continua con densità:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano inoltre assegnate le variabili S e T

$$\begin{aligned} S &:= X \cdot \sin(Y) \\ T &:= X \cdot \cos(Y) \end{aligned}$$

- (a) Calcolare α . Calcolare la funzione di densità congiunta $f_{(X,Y)}$.
- (b) Calcolare il supporto in $\mathbb{R}^2$ di (S, T) e rappresentarlo in un grafico.
- (c) Calcolare la densità del vettore aleatorio (S, T) .

Esercizio 5.

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $X \sim \text{Unif}(0, 4)$ e $Y \sim \text{Unif}(0, 2)$, sia $Z := X + Y$.

- (a) Calcolare la funzione di densità del vettore aleatorio (X, Y) .
- (b) Calcolare la probabilità $P(X + Y > 2)$.
- (c) Calcolare la probabilità condizionata $P(X > 1 | X + Y > 2)$.
- (d) Calcolare la funzione di densità della variabile aleatoria Z .

Esercizio 6.

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni $X \sim \exp(\lambda = \frac{1}{2})$ e $Y \sim \text{Unif}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Siano inoltre assegnate le v.a. S e T nel seguente modo:

$$\begin{cases} S := \sqrt{X} \cos(Y) \\ T := \sqrt{X} \sin(Y) \end{cases}$$

- (a) Calcolare la funzione di densità del vettore aleatorio (X, Y) .

- (b) Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T) .
 (c) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti? A quale distribuzione appartiene la v.a. T ?

Esercizio 7.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità continua $f_{(X,Y)}$:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 + y^2| < 1\}$.

- (a) Calcolare la funzione di densità delle variabili marginali X e Y .
 (b) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ e la covarianza $\text{cov}(X, Y)$. (*Sugg: sfruttare dove possibile le proprietà dell'integrale di funzioni dispari.*)
 (c) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
 (d) Sia $S = X$ e sia $T = \frac{Y}{\sqrt{1-X^2}}$. Calcolare il supporto e la densità del vettore aleatorio (S, T) . Esegui un disegno del supporto di (S, T) .

Soluzioni

Esercizio 1

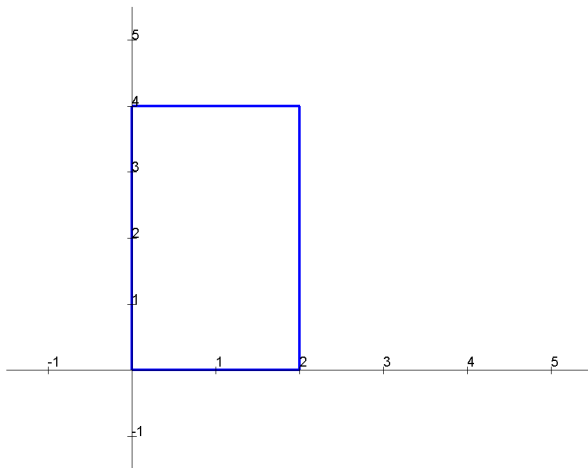


Figure 1: Supporto D

Il supporto D (figura 1) ha una forma rettangolare, esplicitando i moduli all'interno della definizione si ha $-1 < x - 1 < 1$ e $-2 < y - 2 < 2$ e dunque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < 4\}$$

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy &= 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy &= \iint_D \alpha y \, dx dy = \alpha \cdot \int_0^4 \int_0^2 y \, dx dy = \\ &= \alpha \cdot \int_0^4 2y \, dy = \alpha \cdot 2 \left| \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=4} = 16\alpha \end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{1}{16}$.

(b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \begin{cases} 0 & x \notin (0, 2) \\ \int_0^4 \alpha y dy & x \in (0, 2) \end{cases} \\ \int_0^4 \alpha y dy &= \alpha \left| \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=4} = \alpha \cdot 8 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} 0 & x \notin (0, 2) \\ \frac{1}{2} & x \in (0, 2) \end{cases} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx = \begin{cases} 0 & y \notin (0, 4) \\ \int_0^2 \alpha y dx & y \in (0, 4) \end{cases} \\ \int_0^2 \alpha y dx &= \alpha |yx|_{x=0}^{x=2} = \alpha \cdot 2y = \frac{1}{8}y \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & y \notin (0, 4) \\ \frac{1}{8}y & y \in (0, 4) \end{cases} \\ F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f_X(x) \, dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{2} \, dx & t \in (0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \\ F_X(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t & t \in (0, 2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^t f_Y(y) dy = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{1}{8}y dy & t \in (0, 4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{1}{16}t^2 & t \in (0, 4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

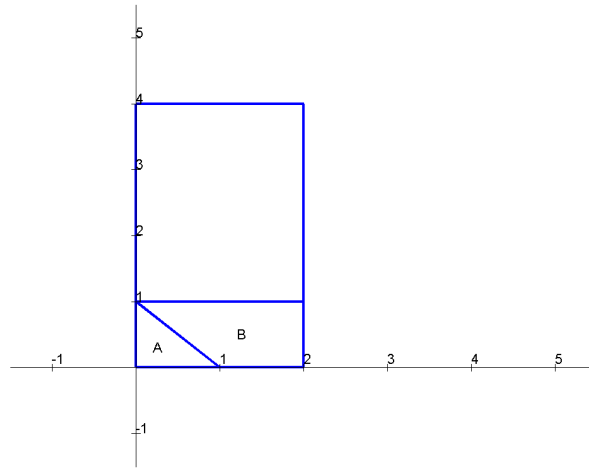


Figure 2: Regioni A e B

(c) Passando al complementare si ha $P(X + Y > 1) = 1 - P(X + Y \leq 1)$. Siano A e B le due regioni indicate nella figura 2.

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 1) &= P((X, Y) \in A) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \alpha y dy dx = \\ &= \int_0^1 \left| \alpha \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \alpha \frac{1 - 2x + x^2}{2} dx = \\ &= \frac{\alpha}{2} \left| x - 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{\alpha}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

Dunque

$$P(X + Y > 1) = 1 - P(X + Y \leq 1) = 1 - \frac{1}{96} = \frac{95}{96}$$

$$\begin{aligned}
P(X + Y > 1 | Y < 1) &= \frac{P(\{X + Y > 1\} \cap \{Y < 1\})}{P(Y < 1)} \\
&= \frac{P((X, Y) \in B)}{P(Y < 1)} \\
&= \frac{P(\{Y < 1\} \setminus \{X + Y \leq 1\})}{P(Y < 1)} \\
&= \frac{P(Y < 1) - P(X + Y \leq 1)}{P(Y < 1)}
\end{aligned}$$

$$P(Y < 1) = F_Y(1) = \frac{1}{16} \quad P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{96}$$

$$P(X + Y > 1 | Y < 1) = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{96}}{\frac{1}{16}} = \frac{5}{6}$$

(d) Per calcolare $F_{(X,Y)}(x, y)$ distinguiamo due casi $(x, y) \notin D$ e $(x, y) \in D$. Se $(x, y) \notin D$ allora vale almeno una delle seguenti 4 condizioni $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \geq 2$ e $y \geq 4$. Per le quali si ha:

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x, y) &= 0 & x \leq 0 \\
F_{(X,Y)}(x, y) &= 0 & y \leq 0 \\
F_{(X,Y)}(x, y) &= F_Y(y) & x \geq 2 \\
F_{(X,Y)}(x, y) &= F_X(x) & y \geq 4
\end{aligned}$$

Resta da considerare il caso $(x, y) \in D$. Per $(x, y) \in D$ si ha:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_0^y \int_0^x \alpha t \, ds \, dt = \int_0^y \alpha t x \, dt = \left| \alpha x \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=y} = \frac{\alpha x y^2}{2} = \frac{x y^2}{32}$$

(e) Sia $g(x, y) = (x + y, y)$ e calcoliamone l'inversa $h(s, t) = g^{-1}(s, t)$.

$$\begin{cases} S = X + Y \\ T = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + T = S \\ Y = T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = S - T \\ Y = T \end{cases} \quad (1)$$

dunque si ha $h(s, t) = (s - t, t)$.

Sia D_2 il supporto del vettore aleatorio (S, T) .

Dai vincoli su X e Y : $0 < X < 2$ e $0 < Y < 4$ utilizzando le equazioni (1) si ha:

$$\begin{cases} 0 < S - T < 2 \\ 0 < T < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S - T > 0 \\ S - T < 2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T < S \\ T > S - 2 \\ T > 0 \\ T < 4 \end{cases}$$

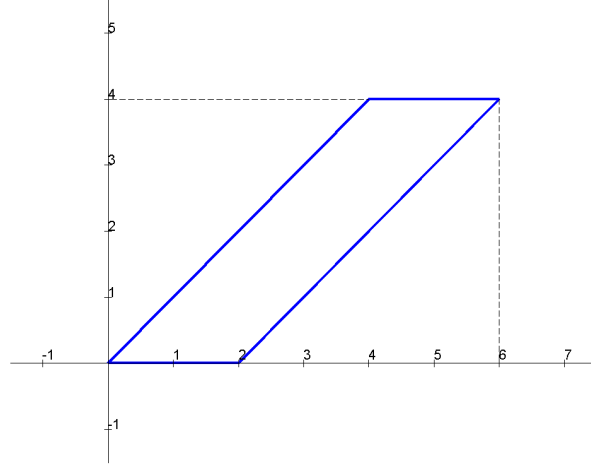


Figure 3: Supporto D_2

Dunque il supporto D_2 (figura 3) di (S, T) è dato da $D_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t < s, t > s - 2, t > 0, t < 4\}$ e $P((S, T) \in D_2) = 1$. Calcoliamo ora la matrice iacobiana di h .

$$J_h(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det(J_h)| = 1$$

Allora per $(s, t) \in D_2$ si ha:

$$f_{(S,T)}(s, t) = f_{(X,Y)}(h(s, t)) \cdot |\det(J_h)| = f_{(X,Y)}(s - t, t) \cdot 1 = \alpha t$$

(f) Affinché X e Y siano indipendenti occorre e basta che valga l'uguaglianza $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ per ogni $(x, y) \in D$. Supponiamo $(x, y) \in D$ cioè $0 < x < 2$ e $0 < y < 4$ allora si ha

$$F_X(x) = \frac{1}{2}x$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{16}y^2$$

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{16}y^2 = \frac{xy^2}{32} = F(X, Y)(x, y)$$

Le variabili aleatorie S e T non sono indipendenti infatti il supporto di (S, T) è un parallelogramma mentre se fossero indipendenti il supporto di (S, T) dovrebbe essere il prodotto dei supporti di S e T e quindi dovrebbe essere un rettangolo.

È possibile mostrare la non indipendenza di S e T anche osservando che sul quadrato $Q = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 2 < y < 4\}$ si ha

$P(Q) = 0$, dunque

$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) = 0$$

mentre $P(0 < X < 2) > 0$ e $P(2 < Y < 4) > 0$, implica

$$P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4) > 0$$

e dunque

$$P(0 < X < 2, 2 < Y < 4) \neq P(0 < X < 2) \cdot P(2 < Y < 4)$$

Esercizio 2

(a) Si può calcolare α risolvendo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx dy &= 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy dx &= \iint_D \alpha(2x^2y + 1) dy dx = \\ &= \alpha \cdot \int_{-1}^1 \int_0^2 2x^2y + 1 \, dy dx = \alpha \cdot \int_{-1}^1 \left[2\frac{x^2y^2}{2} + y \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \alpha \cdot \int_{-1}^1 4x^2 + 2 \, dx = \alpha \cdot \left[4\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \alpha \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{20}{3}\alpha \end{aligned}$$

Quindi si ha $\alpha = \frac{3}{20}$.

(b) Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y e con F_X e F_Y le rispettive funzioni di ripartizione.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy$$

Per $x \notin (-1, 1)$ si ha $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dy = 0$

Per $x \in (-1, 1)$ invece

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \int_0^2 \alpha(2x^2y + 1) \, dy =$$

$$= \alpha \left| 2x^2 \frac{y^2}{2} + y \right|_{y=0}^{y=2} = \alpha (4x^2 + 2)$$

Dunque

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (-1, 1) \\ \alpha (4x^2 + 2) & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Si procede in maniera analoga per f_Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx$$

Per $y \notin (0, 2)$ si ha $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dx = 0$
 Per $y \in (0, 2)$ invece

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx = \int_{-1}^1 \alpha (2x^2 y + 1) \, dx = \\ &= \alpha \left| 2 \frac{x^3}{3} y + x \right|_{x=-1}^{x=1} = \alpha \left(\frac{4}{3} y + 2 \right) \end{aligned}$$

Dunque

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0, 2) \\ \alpha \left(\frac{4}{3} y + 2 \right) & y \in (0, 2) \end{cases}$$

Per calcolare le funzioni di ripartizioni possiamo integrare f_X e f_Y .

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) \, dx$$

Per $a \leq -1$ si ha $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) \, dx = \int_{-\infty}^a 0 \, ds = 0$

Per $a \geq 1$ si ha $F_X(a) = P(X \leq a) = 1$

Per $-1 < a < 1$ invece

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \int_{-\infty}^a f_X(x) \, dx = \int_{-1}^a \alpha (4x^2 + 2) \, dx = \\ &= \alpha \left| \frac{4}{3} x^3 + 2x \right|_{x=-1}^{x=a} = \alpha \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3} a^3 + 2a \right) \end{aligned}$$

Dunque

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \alpha \left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3} a^3 + 2a \right) & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

si procede in maniera analogo per F_Y ottenendo:

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & b \leq 0 \\ \alpha \left(\frac{2}{3}b^2 + 2b \right) & 0 < b < 2 \\ 1 & b \geq 2 \end{cases}$$

(c) Utilizziamo l'uguaglianza $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ risolvendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x \cdot \alpha (4x^2 + 2) dx = \alpha \left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{x=1} = 0 \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy \\ &= \int_0^2 y \cdot \alpha \left(\frac{4}{3}y + 2 \right) dy = \alpha \left[\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \alpha \frac{68}{9} \\ \mathbb{E}[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^y \cdot f_{(X,Y)}(x, y) dydx = \\ &= \int_0^2 \int_{-1}^1 xy \cdot \alpha (2x^2y + 1) dx dy = \\ &= \int_0^2 \alpha \left[2\frac{x^4y^2}{4} + \frac{x^2y}{2} \right]_{x=-1}^{x=1} dy = 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$$

(d) Prima di tutto invertiamo il sistema,

$$\begin{cases} S = \frac{X}{Y} \\ T = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = SY \\ Y = T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = ST \\ Y = T \end{cases}$$

Calcoliamo il supporto D_2 delle variabili aleatorie (S, T) .

$$\begin{aligned} \begin{cases} |X| < 1 \\ |Y - 1| < 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |ST| < 1 \\ |T - 1| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < ST < 1 \\ -1 < T - 1 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} ST > -1 \\ ST < 1 \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} S > -\frac{1}{T} \\ S < \frac{1}{T} \\ T > 0 \\ T < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < T < 2 \\ -\frac{1}{T} < S < \frac{1}{T} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque $D_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2, -\frac{1}{t} < s < \frac{1}{t}\}$
 Calcoliamo ora la matrice Iacobiana.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Iacobiana è t e dunque per la densità di (S, T) si ha:

se $(s, t) \notin D_2$, $f_{(S,T)}(s, t) = 0$

se invece $(s, t) \in D_2$

$$f_{(S,T)}(s, t) = f_{(X,Y)}(st, t) \cdot |t| = \alpha(2s^2t^2 + 1)t = \alpha(2s^2t^4 + t)$$

Esercizio 3

(a) Ricaviamo X e Y in funzione di S e T

$$\begin{aligned} X &= \frac{S+T}{2} \\ Y &= \frac{S-T}{2} \end{aligned} \quad \left| \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dS}X & \frac{d}{dT}X \\ \frac{d}{dS}Y & \frac{d}{dT}Y \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

$$f_{(S,T)}(s, t) = \frac{\alpha}{2} e^{-((\frac{S+T}{2})^2 + (\frac{S-T}{2})^2 + \frac{S+T}{2} \frac{S-T}{2})} = \frac{\alpha}{2} e^{-(\frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}t^2)} \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

(b)

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s, t) dt = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{3}{4}s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}t^2} dt = \alpha \sqrt{\pi} e^{-\frac{3}{4}s^2}$$

(c)

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(S,T)}(s, t) ds = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{1}{4}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2} ds = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-\frac{1}{4}t^2}$$

(d) Per la positività delle funzioni di densità deve essere $\alpha \geq 0$. Per calcolare il valore esatto di α è sufficiente porre l'integrale da meno infinito a più infinito di una funzione di densità uguale a uno.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) ds = \alpha \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}s^2} ds = \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

(e) Le variabili X e Y sono indipendenti infatti sostituendo ad α il valore $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ si ottiene facilmente $f_{(S,T)}(s, t) = f_S(s) \cdot f_T(t)$ per ogni s e t .

(f) $S \sim N(0, \frac{2}{3})$, $T \sim N(0, 2)$

(g) Poiché $X = \frac{S+T}{2}$, S e T sono normali e indipendenti allora anche X è una distribuzione normale. $\text{VAR}[X] = \frac{1}{4}(\text{VAR}[S] + \text{VAR}[T]) = \frac{2}{3}$ dunque $X \sim N(0, \frac{2}{3})$

Esercizio 6

(c) Le variabili aleatorie S e T sono indipendenti e $T \sim N(0, 1)$.

Esercizio 7

(a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & y \in (-1, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(b) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] = \text{cov}(X, Y) = 0$

(c) Non sono indipendenti, se fossero indipendenti si dovrebbe avere $f_{(X,Y)} = f_X \cdot f_Y$ quasi certamente. Oppure se fossero indipendenti si dovrebbe avere $P(X > 0.9, Y > 0.9) = P(X > 0.9)P(Y > 0.9)$ mentre invece si ha $P(X > 0.9) > 0$, $P(Y > 0.9) > 0$ e $P(X > 0.9, Y > 0.9) = 0$

(d) Il supporto di (S, T) è il quadrato Q che ha i lati sulle rette $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. La densità è:

$$f_{(S,T)}(s, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} & (s, t) \in Q \\ 0 & (s, t) \notin Q \end{cases}$$