

Esercizi di Calcolo delle Probabilità

Foglio 7

David Barbato

Esercizio 1. Siano Y e $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Siano inoltre:

$$W_n := \max\{Y, X_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \min\{W_0, \dots, W_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione di W_n .
- (b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- (c) La successione T_n è tight?

Esercizio 2. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti. Con distribuzione $X_n \sim \text{Bern}(\frac{1}{n})$. Siano inoltre assegnate le seguenti variabili aleatorie:

$$S_n := \sum_{k=n+1}^{2n} X_k$$

$$T := \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$W := \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n$$

- (a) Studiare la convergenza di $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p
- (b) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. A quale distribuzione converge?
- (c) Quali sono le distribuzioni di W e T ?
- (d) Cosa si può dire della convergenza in probabilità di S_n ?

Esercizio 3. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie limitate (esiste $M > 0$ tale che per ogni n vale $P(|X_n| < M) = 1$). Dimostrare che se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad una variabile aleatoria X in probabilità allora converge ad X anche in L^p .

Esercizio 4. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successione di variabili aleatorie indipendenti. Supponiamo che le X_n abbiano distribuzione assegnata da

$P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ mentre le Y_n siano assolutamente continue con densità:

$$f_{Y_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t^3}} & t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

siano infine assegnate le v.a. $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da:

$$Z_n := \max\{X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n\}$$

$$T_n := \frac{Z_n}{n^\alpha}$$

- (a) Calcolare la funzione di ripartizione delle variabili aleatorie Z_n .
- (b) Calcolare $P(X_n Y_n > t n^\alpha)$, al variare di $\alpha > 0$.
- (c) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ al variare di $\alpha > 0$

Esercizio 5. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, supponiamo che X abbia distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e Y sia una v.a. discreta con distribuzione $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$, sia infine $Z := X \cdot Y$.

- (a) Calcolare la funzione di densità di Z .
- (b) Calcolare la funzione caratteristica di Z .

Esercizio 6. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni di variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni: $X_n \sim \text{Poisson}(7)$ e $Y_n \sim \text{Bern}(\frac{1}{n})$ per ogni n . Siano inoltre assegnate le seguenti v.a.

$$Z_n := X_n \cdot Y_n$$

$$W_n := \max\{Z_1, \dots, Z_n\}$$

- (a) La successione di v.a. $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Tight?
- (b) La successione di v.a. $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Tight?

Esercizio 7. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = C \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0$$

Discutere della convergenza in distribuzione, in probabilità, in L^p e quasi certa di $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ per n che tende all'infinito. Fornire una dimostrazione quando si è certi della convergenza e trovare un controesempio negli altri casi.

Esercizio 8. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e X variabili aleatorie a valori in Z . Dimostrare le seguenti implicazioni

- (a) Se $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{distr.}} X$ allora per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $P(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(X = k)$.
- (b) Se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $P(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(X = k)$ allora $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{distr.}} X$.

Esercizio 9. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 1)$. Siano inoltre assegnate per ogni n le seguenti variabili aleatorie:

$$Y_n := X_n + X_{n+1} \quad e \quad Z_n := \frac{X_{n+1} + \dots + X_{2n}}{n}$$

- (a) Posto $S_n := \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ si studi la convergenza di $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p .
(b) Studiare la convergenza di Z_n in distribuzione, in probabilità e quasi certa.

Esercizio 10. Sia $I := \{(n, j) | n, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n\}$. Costruire un esempio di famiglia di variabili aleatorie indipendenti $\{X_{n,j}\}_{(n,j) \in I}$ a valori nei numeri interi non negativi tali che:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{n,1} + \dots + X_{n,n}] = 1$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{P(X_{n,1} \geq 1), \dots, P(X_{n,n} \geq 1)\} = 0$
3. Posto $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ si abbia che $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge in distribuzione ad una variabile aleatoria poissoniana.

Esercizio 11. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie congiuntamente indipendenti con distribuzione $X_n \sim Y_n \sim \text{Unif}(0, 1)$, $Z_n \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_n &:= \min\{X_1, \dots, X_n\} \\ T_n &:= \max\{Y_1, \dots, Y_n\} \\ R_n &:= \sum_{k=1}^n W_k \\ Q_n &:= \sum_{k=1}^n \frac{(1 - Z_k)}{n} \\ S_n &:= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k W_k + (1 - Z_k) T_k \end{aligned}$$

- (a) Studiare la convergenza in distribuzione, probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) Studiare la convergenza in distribuzione, probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- (c) Calcolare $P(W_n > \frac{1}{n})$.
 (d) Dimostrare che: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[nW_n] > 0$.
 (e) Quanto vale: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R_n]$?
 (f) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
 (g)* Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa di $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 12. Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione geometrica $X_n \sim \text{Geo}(1/n)$. Consideriamo inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ le seguenti variabili:

$$\begin{aligned} Y_n &:= \frac{X_n}{n} \\ T_n &:= \min\{X_1, \dots, X_n\} \\ W_n &:= \max\{X_1, \dots, X_n\} \\ Z_n &:= \frac{W_n}{n} \end{aligned}$$

- (a) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
 (b) Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità, quasi certa ed in L^p di $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
 (c) Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = +\infty$ quasi certamente.
 (d) Assegnato $\Gamma > 0$, quanto vale il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n}{n} > \Gamma\right)$? (Limite sugli n pari.)
 (e)* Studiare la convergenza di $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esercizio 13. Siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successioni di variabili aleatorie indipendenti con:

$$X_n \sim \text{Poisson}(n) \qquad Y_n \sim \text{Unif}(0, n)$$

Sia $Z_n := \frac{X_n}{Y_n}$

- (a*) Dimostrare che se $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergono in distribuzione rispettivamente alle v.a. T e W allora $\{T_n W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione a TW . (Questo quesito è facoltativo e può essere utilizzato per completare l'esercizio.)
 (b) Calcolare la funzione di densità della variabile aleatoria $S_n := \frac{n}{Y_n}$.
 (c) Studiare la convergenza in distribuzione di $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Indicare l'eventuale distribuzione limite.

SOLUZIONI

Esercizio 2

(a)

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

Quindi $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{distr} 0$ e poiché converge in distribuzione ad una costante allora vale anche $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob} 0$.

Se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi certamente deve convergere quasi certamente a zero. Sia $\epsilon \in (0, 1)$ allora $P(|X - 0| > \epsilon) = \frac{1}{n}$. Poiché sono indipendenti e $\sum_n P(|X - 0| > \epsilon) = \infty$ allora per il lemma di Borel-Cantelli si ha che $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non può convergere quasi certamente a zero.

Per quanto riguarda la convergenza in L^p la cosa più semplice da fare è calcolare esplicitamente il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - 0\|_{L^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

dunque $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero in L^p per ogni p .

(b) Osserviamo innanzitutto che vale:

$$\begin{aligned} S_1 &= X_2 \\ S_2 &= X_3 + X_4 \\ S_3 &= X_4 + X_5 + X_6 \\ S_4 &= X_5 + X_6 + X_7 + X_8 \end{aligned}$$

Allo scopo di utilizzare la legge dei piccoli numeri effettuiamo il seguente cambio di notazione:

$$Y_{n,j} := X_{n+j} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

quindi avremmo che per ogni n le v.a. $\{Y_{n,j}\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ sono indipendenti ed hanno distribuzione $Y_{n,j} \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{n+j}\right)$. Con le

nuove notazioni si ha:

$$\begin{aligned} S_1 &= Y_{1,1} \\ S_2 &= Y_{2,1} + Y_{2,2} \\ S_3 &= Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3} \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= Y_{n,1} + \dots\dots\dots + Y_{n,n} \end{aligned}$$

Le ipotesi per applicare la legge dei piccoli numeri si verificano tutte banalmente ad eccezione del limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(Y_{n,j} \geq 1)$$

dobbiamo stimare le seguenti somme:

$$\sum_{j=1}^n P(Y_{n,j} \geq 1) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

stimiamo le somme con l'integrale di $1/x$ come segue

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$$

integriamo

$$\log\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \leq \log(2)$$

e infine passiamo al limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(Y_{n,j} \geq 1) = \log(2)$$

Quindi $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione ad una poissoniana di parametro $\lambda := \log(2)$

(c) Consideriamo la sottosuccessione $\{S_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $n_k := 2^k$. Per costruzione si tratta di una successione di v.a. indipendenti che converge in distribuzione ad una v.a. S poissoniana. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_k P(S_{n_k} = m) = P(S = m) > 0$$

Sommando in k si ottiene:

$$\sum_k P(S_{n_k} = m) = \infty$$

quindi per il lemma di borel cantelli si ha che per ogni m l'evento $S_{n_k} = m$ si verifica quasi certamente per infiniti $k \in \mathbb{N}$. Per cui si ottiene

$$W = \liminf_n S_n = 0 \quad q.c.$$

$$T = \limsup_n S_n = +\infty \quad q.c.$$

(d) Supponiamo per assurdo che $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga in probabilità ad una v.a. S . Possiamo allora estrarre una sottosuccessione $\{S_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge quasi certamente a S . Consideriamo la sottosottosuccessione:

$$T_k := S_{n_{2^k}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti e con argomento analogo a quello usato nel quesito (c) si ha: $\liminf_k T_k = 0$ *q.c.* e $\limsup_k T_k = +\infty$ *q.c.* questo contraddice l'ipotesi che $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi certamente.

Esercizio 12

Le v.a. X_n sono a valori interi positivi e per ogni k intero positivo vale:

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \quad P(X_n > k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

(a) Calcoliamo la funzione di ripartizione delle v.a. Y_n . Per ogni $t > 0$ vale:

$$P(Y_n \leq t) = P(X_n \leq nt) = 1 - P(X_n > nt) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq t) = 1 - e^{-t}$$

dunque le v.a. $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergono in distribuzione ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1.

(b) La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è positiva e non crescente quindi sicuramente converge. T_n non può assumere valori minori di 1 inoltre vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Per il secondo lemma di Borell Cantelli allora per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $X_n(\omega) = 1$ dunque $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge quasi certamente ad 1.

(c) La successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona quindi quasi certamente converge ad una v.a. W in $\overline{\mathbb{R}}$. Occorre mostrare che $W = +\infty$ quasi certamente. Per l'unicità del limite sarà sufficiente mostrare che $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $+\infty$ in probabilità. Dato $M > 0$

$$P(W_n > M) \geq P(X_n > M) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor M \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

In realtà con le disuguaglianze di sopra abbiamo mostrato anche qualcosa in più. Abbiamo mostrato che W_n è maggiore di X_n e che X_n converge in probabilità a $+\infty$.

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n}{n} > \Gamma\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_m}{2m} > \Gamma\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\lfloor 2m\Gamma \rfloor} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-2\Gamma}$$

(e) Questo quesito è simile al quesito (c) dell'esercizio 5 del foglio 4.

Esercizio 13

$$\mathbb{E}[X_n] = VAR(X_n) = n$$

(b) Calcoliamo la funzione di ripartizione di S_n

$$P(S_n \leq t) = P\left(\frac{n}{Y_n} \leq t\right) = P\left(Y_n \geq \frac{n}{t}\right)$$

$$F_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t} & 1 \leq t \end{cases}$$

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & 1 \leq t \end{cases}$$

(c)

$$Z_n = \frac{X_n}{Y_n} = \frac{X_n}{n} \cdot \frac{n}{Y_n}$$

sappiamo che la distribuzione di $\frac{n}{Y_n} = S_n$ non dipende da n quindi converge in distribuzione, per la parte (a) è sufficiente studiare la convergenza in distribuzione di $\frac{X_n}{n}$. Sappiamo che:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right] = 1 \quad VAR\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

allora in maniera analoga a quanto fatto nell'esercizio 7 si ha $\frac{X_n}{n}$ converge in distribuzione ad 1. Quindi Z_n converge in distribuzione ad una variabile aleatoria Z con densità

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & 1 \leq t \end{cases}$$